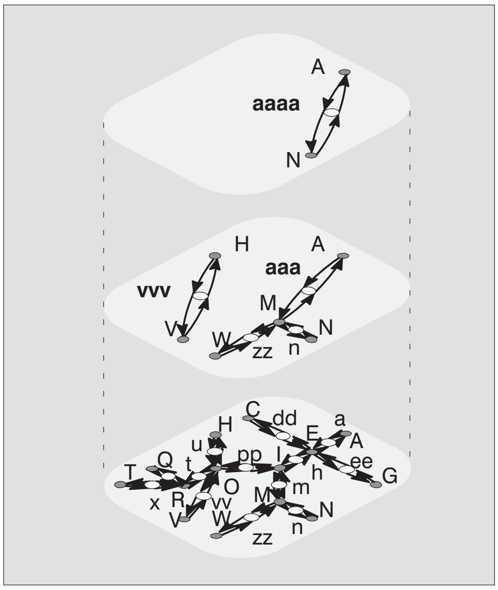
INSTITUT FÜR BAUINFORMATIK

Univ.–Prof. Dr.–Ing. Rudolf Damrath UNIVERSITÄT HANNOVER

Diplomarbeit

Modellierung von hierarchischen Graphensystemen



Martin Rose

Matr.–Nr. 1463002

Betreuung: Dipl.–Ing. Reinhard Hüttermann
Prof. Dr.–Ing. Rudolf Damrath

Erstprüfer: Prof. Dr.–Ing. Rudolf Damrath
Zweitprüfer: Dr.–Ing. Volker Berkhahn

Kurzfassung

Graphen haben sich zur Darstellung der Struktur einer Anwendung als sehr geeignet erwiesen. Gerade im Ingenieurbereich können mit Hilfe der Graphen Lösungen für Aufgaben mit komplexen Strukturen, wie sie etwa im Verkehrswesen auftreten, gefunden werden. Hierbei tritt immer öfter die Schwierigkeit auf, daß die Graphen zu groß werden. Die Graphentheorie hat auf diese Schwierigkeit bisher kaum reagiert[1)], da in der theoretischen Mathematik die Größe von Graphen unwesentlich ist.

Eine mögliche Lösung dieses Problems, die in dieser Arbeit untersucht wird, ist das Vergröbern und Verfeinern von Graphen, das zwangsläufig zu Hierarchien von Graphen führt. Um die sehr komplexen Zusammenhänge solcher Hierarchien in den Griff zu bekommen, empfiehlt sich ein hierarchisches Graphensystem. Systematisch werden in dieser Arbeit die Grundlagen untersucht, die zu einer Modellierung eines solchen Graphensystems unabdingbar sind.

Ausgangspunkt der Untersuchung ist die Analyse der bildlichen Darstellung von Wegenetzen in Karten mit unterschiedlichen Maßstäben. Dabei ergibt sich ein prinzipieller Unterschied zwischen maßstäblichen und symbolhaften Wegenetzdarstellungen. Bei dem Übergang von großen zu kleinen Maßstäben ergibt sich bei maßstäblichen Wegenetzdarstellungen ein Vergröbern und Verfeinern von Flächen und bei symbolhaften Wegenetzdarstellung ein Reduzieren und Expandieren der Wegenetzstruktur, die oft systematisch anhand von Wegenetzkategorien durchgeführt wird.

Bei der Beschreibung der Wegenetzdarstellung durch Graphen werden schlichte und bipartite Graphen, sowie gerichtete Graphen als Sonderform von bipartiten Graphen untersucht. Für die maßstäbliche Darstellung von Wegenetzen erweisen sich schlichte Graphen als der geeingete Graphentyp, da hierbei nur die Geometrie von Flächen und die Topologie ihrer Lage zueinander beschrieben wird. Bei symbolhaften Wegenetzdarstellungen gibt es einen Unterschied, und zwar ob nur die Eigenschaften der Orte (beziehungsweise Wege) für die Anwendung ausreichen, oder ob die Orte und Wege als identifizierbare Objekte mit Eigenschaften erforderlich sind, wie dies bei Straßennetzdarstellungen meist der Fall ist. Für symbolhafte Wegenetze, in denen nur die Eigenschaften des Netzes und die Aussage über mögliche Verbindungen von Interesse sind (zum Beispiel Schiffs– oder Flugroutennetze), reichen ebenfalls schlichte Graphen aus. Ist in der Anwendung eine exakte Beschreibung der Geometrie und Topologie aller Elemente (Orte und Wege) notwendig, so sind bipartite Graphen die geeignetste Darstellungsform. Ist die Richtung der Wege neben der genauen Darstellung der Orte von besonderer Wichtigkeit, empfehlen sich gerichtete Graphen.

Das Vergröbern und Verfeinern von maßstäblichen Wegenetzen führt zum Vergröbern und Verfeinern der schlichten Graphen zur Darstellung der Wege. Das Reduzieren und Expandieren von symbolhaften Wegenetzen führt zu einer Kombination von Reduzieren und Expandieren sowie Vergröberung und Verfeinerung der bipartiten Graphen.

1) Bei der bisherigen Literaturrecherche zur Lösung des Problems großer Graphen ist lediglich [Wa89] aufgefallen.

Das Reduzieren und Expandieren entspricht dem Entfernen und Hinzufügen von Knoten und Kanten zu einem Graph. Das Vergröbern und Verfeinern stellt eine Abbildung dar. Bei der Untersuchung der Vergröberung und Verfeinerung von Knoten aus Graphen ergeben sich vier Möglichkeiten der Abbildung. Sie unterscheiden sich darin, ob sie bijektiv sind oder nicht, ob die innere Struktur der Verfeinerung eines Knotens auf der groben Stufe explizit angegeben werden muß. Sie unterscheiden sich aber auch in der Art und Weise, wie die Nachbarknoten eines groben Knoten an seine Verfeinerung "angeschlossen" sind. Bis auf eine Möglichkeit, bei der die Knoten nicht bijektiv auf Knoten und die Kanten nicht bijektiv auf Kanten abgebildet werden, ist in den verfeinerten Graphen eine Hierarchie zu erkennen, die den Vergröberungs− und Verfeinerungsvorgang bis zu diesem Graph beschreibt. Für eine der Abbildungsmöglichkeiten wurden neue (Anschluß−) Graphen definiert, die die Verfeinerung durch ein rekursives Ersetzen der Knoten durch Graphen abbilden können. Obwohl es so scheint, daß diese Abbildungsmöglichkeit in einem Graphensystem die meisten Vorteile hat, sollte die Bewertung der vier Möglichkeiten nach Anwendungen der Vergröberung und Verfeinerung in praktischen Beispielen getroffen werden.

In jedem Fall muß bei einer Vergröberungs oder einer Verfeinerung die Strukturverträglichkeit eingehalten werden. Diese Regel garantiert die korrekte Abbildung der inzidenten Kanten der zu vergröbernden und verfeinernden Knoten.

Knoten lassen sich vergröbern und verfeinern, Kanten dagegen nicht. So kann die direkte Verbindung zweier Knoten der gleichen Menge eines Graph mit schlichten Graphen nicht realisiert werden, während dies für bipartite Graphen möglich ist. Für gerichtete Graphen ergeben sich Fragen bei V+V der Pfeile mit einer inneren Struktur. Um Pfeile auf eine Struktur von Knoten und Pfeilen zu verfeinern, sind nur die 3. und 4. vorgestellten Abbildungsmöglichkeiten verwendbar.

Die Vorteile des Vergröberns und Verfeinerns von Graphen ergeben sich durch die mögliche Ausnutzung der dabei entstehenden hierarchischen Struktur. Zwischen Erzeugung, Manipulation und Verwaltung dieser Verfeinerungshierarchie empfiehlt es sich, ein System zu entwickeln.

Prinzipiell muß dieses System aus den unterschiedlich feinen Graphen bestehen, die nach der Verfeinerungstiefe sortiert sind, und der Darstellung der Abbildung, die von dem Graph einer Hierarchiestufe zum Graph der darüber− oder darunterliegenden Hierarchiestufe führt. Die Minimalbedingung, die in dem System erfüllt sein muß, ist die Regel der Strukturverträglichkeit. Daher ist sicherzustellen, daß keine der auf das System ausgeführten Operation diese Regel verletzt. Die wichtigsten Operationen neben der Vergröberung und Verfeinerung von Knoten sind die Grundoperationen auf Graphen, wie Einfügen und Entfernen von Knoten und Kanten.

Für jede Anwendung, für die ein solches System entwickelt wird, müssen zusätzlich zur Strukturverträglichkeit weitere Regeln eingeführt werden. Diese wirken sich auf die Struktur im System aus. So ist für die Darstellung von Wegenetzen zu fordern, daß jede Verfeinerung eines Knotens eine Zusammenhangskomponente darstellt.

Inhalt

1. Einleitung

Die Lösung einer Aufgabe innerhalb einer Ingenieuranwendung erfordert eine genaue Beschreibung der problemrelevanten Elemente, die in der Anwendung vorkommen. Ebenso wichtig ist die korrekte Abbildung aller Beziehungen zwischen diesen Elementen. Die Zusammenfassung der Beziehungen bildet die Struktur der Anwendung entsprechend der Aufgabenstellung. Es ist zweckmäßig, diese Struktur durch einen Graph darzustellen. Dies gilt besonders für unregelmäßige Strukturen, wie sie beispielsweise in Wegenetzen des Verkehrswesens auftreten.

Die Vorteile von Graphen bei der Beschreibung und Lösung von Topologie– und Optimierungsproblemen, die durch die schnellen Fortschritte in der Graphentheorie seit den fünfziger Jahren entstanden, konnten erfolgreich für praktische Anwendungen genutzt werden. Aus diesem Grund werden immer mehr grundlegende Aufgabenstellungen im Ingenieurwesen auf die abstrakten Problemstellungen der Graphentheorie zurückgeführt.

Ein typisches Beispiel für die Anwendung von Graphen im Ingenieurbereich ist die Suche nach dem kürzesten Weg zwischen zwei Elementen innerhalb eines Graphen. Hiermit lassen sich etwa Bestwegrouten in Verkehrsnetzen, der minimale Verbrauch von Kabeln zur Versorgung eines Hochhauses oder die effizienteste Nutzung von Industrierobotern zum Löten von Leiterplatinen bestimmen. Mit Graphen läßt sich das optimale Beladen eines Güterfahrzeugs ebensogut ermitteln, wie der günstigste Ablaufplan für den Bau eines großen Gebäudekomplexes oder die Konfliktflächen aufeinandertreffender Fahrzeugströme an Verkehrsknotenpunkten.

Die Entwicklungen sowohl in den Ingenieuranwendungen als auch in der Graphentheorie begünstigen sich gegenseitig. Während im Ingenieurwesen die effizienten Lösungen der Graphentheorie verwendet werden können, führen die neu auftretenden Fragestellungen der Praxis zu neuen Aufgaben und Lösungen in der Graphentheorie und erweitern auf diese Weise das Anwendungsgebiet von Graphen. Zum Beispiel bestand der Anlaß für die Entwicklung eines schnellen Algorithmus zur Suche kürzester Wege in Graphen aus zwei konkreten Ingenieurproblemen. Zum einen mußten Kommunikationsschwierigkeiten in Fernmeldenetzen beseitigt werden, und zum andern waren Transportprobleme im Verkehrswesen zu lösen. Effiziente Suchalgorithmen zur Bestimmung kürzester Wege, die mittlerweile nahezu optimal sind, wurden daraufhin in der Graphentheorie auf einer abstrakten Ebene erarbeitet.

Eine Schwierigkeit, die sich für die praktische Anwendung von Graphen im Ingenieurbereich immer häufiger ergibt, die in der Graphentheorie jedoch bisher kaum beachtet wurde, ist die Behandlung großer Graphen. Für die theoretische Behandlung von Graphen spielt die Anzahl der Elemente und die Anzahl der Elementbeziehungen zueinander keine Rolle. In der Graphentheorie werden sogar unendliche Graphen untersucht. Für die praktische Behandlung großer Graphen ergeben sich jedoch drei entscheidende Probleme:

Das erste Problem ist die begrenzte Speicherkapazität der zur Verfügung stehenden Computer. Nicht selten kommt es in den Ingenieurwissenschaften zu einer zwangsweisen Einschränkung bei der Abbildung der Struktur der Aufgabenstellung auf einen Graph, weil die Anzahl der Elemente in der Anwendung die Speicherkapazität des Rechners weit überschreitet. So ist es beispielsweise bis jetzt noch nicht gelungen, das gesamte bundesdeutsche Eisenbahnnetz in einer Anwendung zu erfassen. Die Möglichkeit, etwa das komplette europäische Verkehrsnetz mit allen notwendigen Details auf einen "einfachen" Graph zurückzuführen, ist auch bei weiterhin steigenden Rechnerleistungen auf absehbare Zeit praktisch undenkbar.

Das zweite Problem bei großen Graphen ist die Effizienz der Algorithmen. Je mehr Elemente ein Graph besitzt, desto langsamer werden die Algorithmen. Hierbei ist zu beachten, daß die Algorithmen, abhängig von der Anzahl der Elemente, meist nicht ein lineares, sondern ein quadratisches oder noch schlechteres Laufzeitverhalten aufweisen. Oft werden naturgemäß große Bereiche des Graphen von den Algorithmen verwendet, obwohl diese Bereiche a priori für das Ergebnis nicht relevant sein können. Wenn etwa in einem Verkehrsnetz mit allen Straßen Deutschlands der kürzeste Weg von Dresden nach München gesucht werden soll, so wird ein üblicher effizienter Algorithmus fast den gesamten zugehörigen Graph durchsuchen, obwohl nur Hauptstraßen im südöstlichsten Netzteil in Fragen kommen können.

Das dritte Problem besteht in der mangelnden Überschaubarkeit und Handhabbarkeit großer Graphen. Dieses Problem ergibt sich aus der grundlegenden Forderung, daß Lösungen von Ingenieuraufgaben nicht nur korrekt, sondern auch nachvollziehbar und kontrollierbar sein müssen. Es reicht daher nicht aus, die komplexe Struktur innerhalb einer großen Menge notwendiger Elemente der Anwendung auf einen Graph abzubilden und darauf die richtigen Operationen auszuführen. Ebenso wichtig ist es, die Ergebnisse dieser Operationen plausibel machen zu können. Dies ist zum Beispiel für große Graphen mit mehreren tausend Elementen und Elementbeziehungen kaum möglich.

In den Ingenieurwissenschaften ist es üblich, für komplexe Probleme Vereinfachungen zu treffen, wenn sie machbar und zulässig sind. Dadurch wird die Größe des Problems verringert, die Nachvollziehbarkeit erheblich gesteigert und nicht selten eine geeignete Lösung überhaupt erst ermöglicht. Für die Vereinfachungen gilt prinzipiell, daß ein Problem so einfach wie möglich und so genau wie nötig beschrieben werden sollte.

Um die aufgezeigten Probleme bei der Behandlung großer Graphen zu lösen, bieten sich ebenfalls Vereinfachungen an. Eine solche Vereinfachung besteht in einer Vergröberung der Struktur zur gegebenen Anwendung. Sie sollte, ebenso wie eine eventuelle Verfeinerung zur genaueren Abbildung der Struktur, der jeweiligen Problemstellung angepaßt sein. Zum Beispiel ist zur Darstellung eines Wegenetzes für den Schwerlastverkehr im Straßenverekehrswesen innerhalb einer Anwendung eine völlig andere Vergröberung beziehungsweise Verfeinerung erforderlich als eine entsprechende Darstellung eines Wegenetzes für den Fahrradverkehr in derselben Anwendung.

Oft ist eine bereichsweise Vergröberung oder Verfeinerung am sinnvollsten. Im Beispiel mit der Suche des kürzesten Weges von Dresden nach München bietet sich etwa eine lokale Verfeinerung im südöstlichen deutschen Straßennetz an, während für den Rest des Netzes eine sehr grobe Struktur ausreicht.

Die Darstellung jeder Vergröberung und Verfeinerung für eine bestimmte Aufgabenstellung innerhalb einer Anwendung durch jeweils einen neuen Graph ist nicht zweckmäßig, zumal auf diese Weise die erwähnten Probleme nicht gelöst werden können. Zweckmäßig erscheint es, für diese Anwendung ein System von Graphen aufzubauen, das ein Vergröbern und Verfeinern abhängig von der aktuellen Aufgabe in systematischer Form erlaubt. Dieses Graphensystem müßte zu einer Verringerung oder zumindest zu einer günstigeren Verwaltung der benötigten Speicherkapzität für Graphen führen. Es sollte die Grundlagen für Algorithmen bieten, die besonders für eine große Anzahl von Graphenelementen effizient arbeiten. Darüberhinaus muß das Graphensystem eine einfache, übersichtliche und nachvollziehbare Behandlung großer Graphen unterstützen können.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein solches Graphensystem zur Vergröberung und Verfeinerung von Strukturen zu entwickeln. Dabei wird von einem hierarchischen System ausgegangen, bei dem auf der obersten Hierarchiestufe die gröbste Struktur der Anwendung beschrieben wird und die darunterliegenden Stufen zu einer immer feineren Struktur innerhalb der oder des Graphen führen.

Den Ausgang für die Entwicklung des hierarchischen Graphensystems soll das maßstabsabhängige Vergröbern und Verfeinern von Wegenetzen in Karten bilden. Anhand der relativ einfachen, aber wichtigen Anwendung des Verkehrswesens kann das Prinzip des Vergröberns und Verfeinerns sehr anschaulich erläutert werden. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß diese Anwendung nur ein Beispiel unter einer Vielzahl möglicher Anwendungen ist, deren Struktur oft nicht so leicht erkennbar ist. Die geometrische Struktur der Wegenetze sollte auf keinen Fall mit der topologischen Struktur verwechselt werden, die durch einen Graph dargestellt wird.

Die Entwicklung des hierarchischen Graphensystems unterteilt sich in sechs Kapitel.

- Zunächst werden in Kapitel 2 die Grundlagen der Graphentheorie soweit erläuert, wie sie zum Verständnis der Arbeit benötigt werden. Dabei werden neben schlichten Graphen mit einer Menge von Elementen, sowie einer Relation auf der Menge, auch bipartite und gerichtete Graphen eingeführt, die aus jeweils zwei Mengen und zwei Relationen bestehen.
- Nach der Einführung der Graphen werden in Kapitel 3 Wegenetze in Karten mit unterschiedlichen Maßstäben untersucht, um das Prinzip des Vergröberns und Verfeinerns in der Praxis der bildlichen Darstellung von Wegestrukturen zu erfassen.

- In Kapitel 4 wird die Umsetzung der Struktur von Wegenetzen auf Graphen gezeigt. Dabei werden die Vor– und Nachteile unterschiedlicher Umsetzungen untersucht. Besonders interessant sind hierbei die unterschiedlichen Möglichkeiten, welche schlichte, bipartite und gerichtete Graphen bieten.
- Das Vergröbern und Verfeinern von Graphen wird in Kapitel 5 analysiert. Neben der Untersuchung der unterschiedlichen Möglichkeiten des Vergröberns und Verfeinerns von Knoten, wird auch das Vergröbern und Verfeinern von Knotenverbindungen erläutert.
- In Kapitel 6 werden die prinzipiellen Eigenschaften von hierarchischen Graphensystemen zur Unterstützung der Vergröberung und Verfeinerung von Graphen erläutert. Dabei werden neben den Strukturierungen solcher Systeme auch grundlegende Operationen zum Vergröbern und Verfeinern von Knoten, sowie zum Einfügen und Entfernen von Knoten und Kanten in und aus einem Graphensystem vorgestellt. Den Abschluß bildet ein Beispiel für eine Anwendung auf ein solches System in Form einer Routensuche.
- Das letzten Kapitel 7 dient einem Ausblick, in dem denkbare Anwendungen des Vergröberns und Verfeinerns von Graphen im Ingenieurbereich aufgezeigt.

2. Grundlagen zur Graphentheorie

Die Graphentheorie ist ein Teilgebiet der kombinatorischen Mathematik. Obwohl ihre Anfänge schon über 250 Jahren zurückliegen, hat das Interesse an der Graphentheorie erst in den letzten Jahren in der Mathematik, und vor allem im Ingenieurwesen durch die dort auftretenden topologischen Probleme, stark zugenommen. In diesem Kapitel können und sollen nur die Grundlagen, die zum Verständnis der vorliegenden Arbeit notwendig sind, kurz erläutert werden. Für weitergehende Informationen zu Graphen sei auf die zahlreiche Grundlagenliteratur, wie [Br94], [Ju94] oder [Sch89] verwiesen.

Eine Nomenklatur für die Graphentheorie ist bisher nicht eindeutig festgelegt. Fest steht, daß Graphen Elemente und Beziehungen zwischen diesen Elementen beschreiben. Die Art und Weise, wie eine solche Beschreibung aussieht, ist bei vielen Autoren oft sehr unterschiedlich. In diesem Kapitel werden schlichte, bipartite und gerichtete Graphen definiert und Begriffe zur Beschreibung ihrer Struktur eingeführt, wie sie im folgenden benutzt werden.

2.1. Schlichte Graphen

Ein **schlichter Graph** ist eine Menge aus wohlunterscheidbaren Elementen mit gleichen Eigenschaften, der eine Struktur aufgeprägt ist. Die aufgeprägte Struktur wird durch eine homogene binäre Relation zwischen den Elementen der Menge beschrieben. Eine Folge, ein Baum oder auch eine unstrukturierte Menge sind Sonderfälle eines schlichten Graphen.

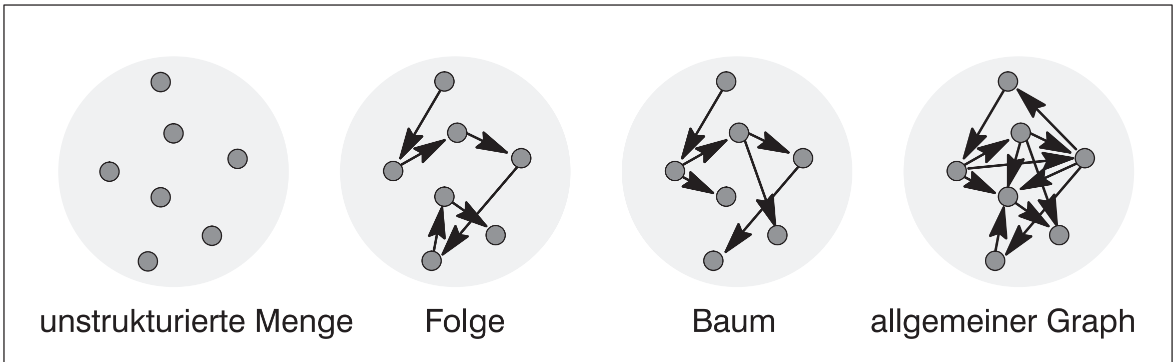


Bild 1: Unterschiedliche Ausprägungen eines schlichten Graphen

Definition: Ein schlichter Graph G besteht aus einer Menge V und einer homogenen binären Relation E auf V.

$$G := (V; E) \qquad mit \quad E \subseteq V \times V \tag{1}$$

Die Elemente der Menge V heißen **Knoten** (englisch "node" oder "vertex"). Einem Knoten können Eigenschaften und Methoden zugeordnet werden. So können zum Beispiel den Verkehrsknotenpunkten eines Straßennetzes als Knoten eines Graphen Eigenschaften, wie etwa die Informationen über eine Lichtsignalanlage oder die Anordnung der Haltespuren, zugeordnet werden. Die Anzahl der Knoten wird mit $|V|$ angeben.

Ein Element der Relation E, also ein geordnetes Paar zweier Knoten, heißt **Kante** (englisch "edge"). Die Kante $e = (u,v) \neq (v,u)$ hat den Anfangsknoten u und den Endknoten v. u und v sind zueinander Nachbarknoten. Sie sind mit e **inzident**, und v ist **adjazent** (benachbart) zu u. Eine Kante $e = (u,u)$ mit demselben Anfangs$-$ und Endknoten heißt **Schlinge**. Die Bezeichnung $|E|$ gibt die Anzahl der Kanten in E an.

Da Graphen unabhängig von einer geometrischen Anordnung sind, lassen sie sich auf vielfache Weise darstellen. Meistens wird eine Darstellung gewählt, in der die Knoten als Kreise und die Kanten als Strecken mit Pfeilen gekennzeichnet sind. Häufig benutzt man auch die sogenannte Adjazenzmatrix. Dies ist eine boolsche $(n \times n)-$Matrix $A=(a_{ij})$. Die Einträge a_{ij} beschreiben die Kanten von Knoten i zu Knoten j.

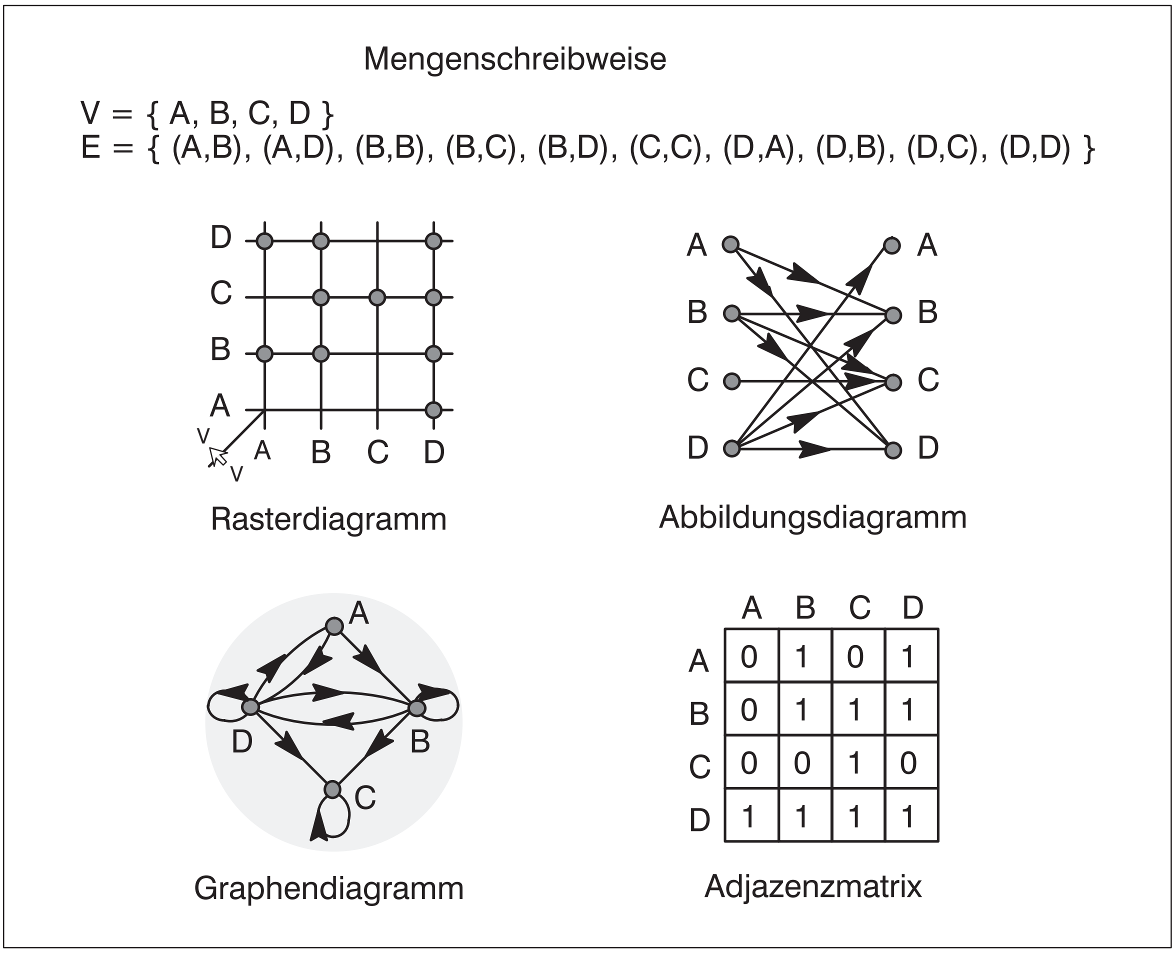


Bild 2: Fünf Darstellungsformen eines schlichten Graphen

In der Literatur zur Graphentheorie taucht sehr oft die Unterscheidung von gerichteten und ungerichteten Kanten auf. Da Kanten zumindest nach Definition (1) geordnete Paare sind, haben sie zwangsläufig eine Richtung. Demnach gibt es keine ungerichteten Kanten in schlichten Graphen. Ungerichtete Graphen sind symmetrische Graphen; das heißt, wenn es in der Relation E eines schlichten Graphen $G=(V;E)$ eine Kante (u,v) vom Knoten u zum Knoten v gibt, so existiert in E auch die Kante (v,u).

2.2. Bipartite Graphen

In vielen Anwendungen werden zwei unterschiedliche Mengen benötigt, um ein Problem zu beschreiben. Typische Beispiele sind Zuordnungsprobleme, wie etwa das Aufteilen möglicher Arbeitsvorgänge auf einer Baustelle an die Arbeiter mit ihren verschiedenen Fähigkeiten.

Unterschiedliche Mengen in einem Graph können zum einen als disjunkte Teilmengen der Knoten eines schlichten Graphen aufgefaßt werden, zum anderen in Form zweier Mengen, zwischen denen zwei heterogene binäre Relationen bestehen. Diese zweite Form der Strukturbeschreibung ist durch einen **bipartiten Graph** darstellbar.

Definition: Ein bipartiter Graph G besteht aus zwei unterschiedlichen Mengen V_1 und V_2 sowie aus zwei heterogenen binären Relationen R_{12} beziehungsweise R_{21} auf V_1 und V_2 beziehungsweise auf V_2 und V_1.

$$G := (V_1, V_2; R_{12}, R_{21}) \quad mit \quad R_{12} \subseteq V_1 \times V_2 \;\; und \;\; R_{21} \subseteq V_2 \times V_1 \qquad (2)$$

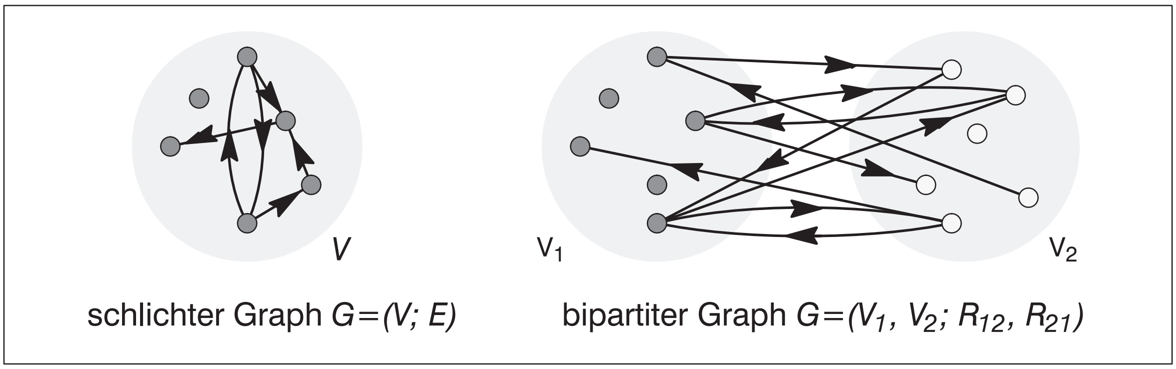


Bild 3: Schlichter Graph und bipartiter Graph

Die Elemente der Mengen V_1 und V_2 können als Knoten und die geordneten Paare der Relationen R_{12} und R_{21} können als Kanten bezeichnet werden. Es ist hierbei jedoch Vorsicht geboten, da von verschiedenen Autoren gerade bei bipartiten Graphen oft unterschiedliche Bezeichnungen verwendet werden. Besonders beim Namen "Kante" gibt es große Diskrepanzen. In dieser Arbeit werden grundsätzlich nur geordnete Paare als Kanten bezeichnet.

2.3. Gerichtete Graphen

Häufig ist es zweckmäßig, die Beziehung zwischen zwei Elementen einer Menge genauer zu beschreiben, wie dies durch ein geordnetes Paar möglich ist. So könnte der Wunsch bestehen, in einem Straßenverkehrsnetz neben der Zuordnung von Verkehrsknotenpunktattributen zu den Knoten eines schlichten Graphen auch die Fahrbahnrichtungen zwischen den Verkehrsknotenpunkten detaillierter beschreiben zu wollen. Hierzu müssen die Kanten des schlichten Graphen in eigenständige Elemente einer zweiten Menge neben der Knotenmenge überführt werden.

Eine sinnvolle Möglichkeit hierzu bieten **gerichtete Graphen**. Gerichtete Graphen stellen einen Sonderfall der bipartiten Graphen dar. IhreBesonderheit liegt in einer Zusatzanforderung an die Relationen der bipartiten Graphen. Es wird gefordert, daß alle Knoten aus einer der beiden Mengen nur durch höchstens zwei geordnete Paare mit den Knoten der anderen Menge verbunden sein dürfen. Dabei befinden sich von zwei Verbindungen die geordneten Paare niemals in derselben Relation.

Definition: Ein gerichteter Graph G ist ein bipartiter Graph, wobei die Elemente der zweiten Menge nur in einem geordneten Paar der ersten Relation und nur in einem geordneten Paar der zweiten Relation auftreten dürfen.

$$G := (V, A\,; R_{VA}, R_{AV}) \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\textit{mit}\quad R_{VA} \subseteq V \times A \quad \textit{und} \quad R_{AV} \subseteq A \times V,\\
&\textit{wobei für alle } a \in A \textit{ und für alle } u, v \in V \textit{ gilt}:\\
&(u,a) \in R_{VA} \;\wedge\; u \neq v \quad\Rightarrow\quad (v,a) \notin R_{VA}\\
&(a,u) \in R_{AV} \;\wedge\; u \neq v \quad\Rightarrow\quad (a,v) \notin R_{AV}
\end{aligned}$$

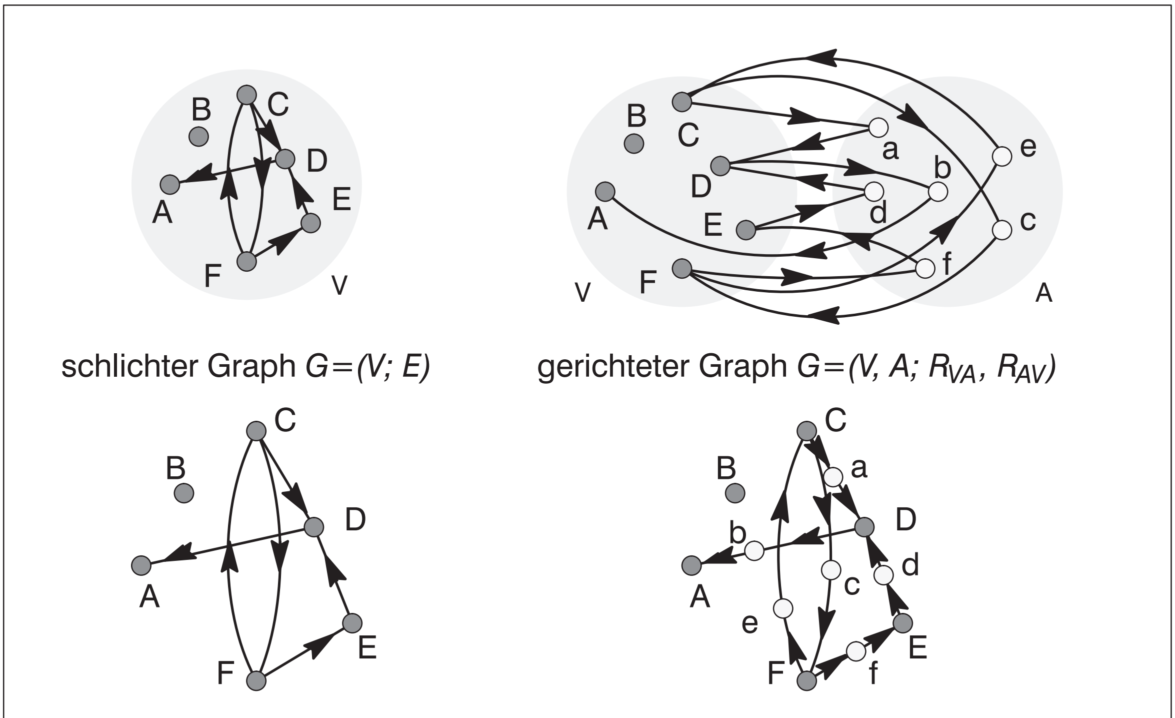


Bild 4: Schlichter Graph und gerichteter Graph

Die Elemente der ersten Menge V heißen, wie bei schlichten Graphen, **Knoten**. Die Elemente der zweiten Menge A beschreiben die Eigenschaften der Verbindung zwischen jeweils zwei Knoten aus V. Oft werden diese Elemente aus A, wie die geordneten Paare in schlichten Graphen, *Kanten* genannt. Dies führt häufig zu Verwechslungen, aus denen nicht selten Fehler resultieren. Um Verwechslungen zu vermeiden, werden die Elemente der zweiten Menge A im folgenden als **Pfeile** (englisch ”arrow”) bezeichnet.

Die Relationen R_{VA} und R_{AV} beschreiben die Inzidenzen (Inzidenzkanten) zwischen Knoten und Pfeilen. Zu jedem Pfeil existiert höchstens ein geordnetes Paar aus R_{VA} und höchstens eins aus R_{AV}. Die geordneten Paare der Relation R_{VA} heißen **Ausgangsinzidenzen** und die der Relation R_{AV} heißen **Eingangsinzidenzen**. Die Richtung der Inzidenzkanten gibt die Richtung der Pfeile an. Um von einem Knoten u aus V zu einem adjazenten Knoten v aus V zu gelangen, wird eine Ausgangsinzidenz (u,a) aus R_{VA} von u zu einem Pfeil a aus A benötigt und weiter eine Eingangsinzidenz (a,v) aus R_{AV} von a nach v.

Gerichtete Graphen können auf schlichte Graphen zurückgeführt werden, indem ein Pfeil mit der zugehörigen Ausgangs– und Eingangsinzidenz als eine Kante im schlichten Graph aufgefaßt wird. Dabei gehen jedoch die Eigenschaften des Pfeils verloren. Außerdem können zwei wichtige Merkmale der gerichteten Graphen nicht übertragen werden: Gerichtete Graphen ermöglichen mehrere ”parallele” Pfeile zwischen zwei Knoten und lassen ”partielle” Pfeile zu, die keine Verbindung zwischen zwei Knoten herstellen. In schlichten Graphen existieren weder parallele noch partielle Kanten.

2.4. Begriffe zur Beschreibung der Graphenstruktur

Die Struktur eines Graphen wird allein durch die Beziehungen zwischen den Knoten beschrieben. So ist die Struktur schlichter Graphen durch die homogene Relation und die Struktur bipartiter (und gerichteter) Graphen durch die beiden heterogenen Relationen festgelegt. Um die Struktur untersuchen zu können, werden in diesem Abschnitt einige Begriffe zur Beschreibung der Struktureigenschaften von Graphen eingeführt.

Jeder schlichte Graph $G'=(V';E')$, dessen Knotenmenge V' eine Teilmenge von V eines schlichten Graphen $G=(V;E)$ ist, und dessen Relation E' genau die Kanten aus E enthält, von denen beide Endknoten in V' vorhanden sind, heißt **Teilgraph**. Der Teilgraph $G' = (V_1', V_2'; R_{12}', R_{21}')$ eines bipartiten Graphen $G = (V_1, V_2; R_{12}, R_{21})$ besteht aus den beiden Teilmengen $V_1' \subseteq V_1$ und $V_2' \subseteq V_2$ sowie den entsprechenden Relationen $R_{12}' \subseteq R_{12}$ und $R_{21}' \subseteq R_{21}$.

Besitzt ein Graph nur Knoten, aber keine Kanten ($E=\{\}$ bzw. $R_{12} = R_{21} = \{\}$), so heißt der Graph **leer**, sind dagegen alle möglichen Kanten vorhanden ($E = V \times V$ bzw. $R_{12} = V_1 \times V_2 \;\wedge\; R_{21} = V_2 \times V_1$), so ist der Graph ein **vollständiger** Graph. Graphen mit relativ wenig Kanten heißen **licht** und Graphen mit relativ vielen Kanten heißen **dicht**.

Für jeden Knoten v eines Graphen wird der **Grad** $d(v)$ (englisch ”degree”) von v als die Anzahl der mit v inzidenten Kanten definiert. Er setzt sich aus einem Ausgangsgrad (englisch ”outdegree”) $d_{out}(v)$ und einem Eingangsgrad (englisch ”indegree”) $d_{in}(v)$ zusammen. Der Ausgangsgrad ist als Anzahl der Kanten mit dem Anfangsknoten v und der Eingangsgrad ist als die Anzahl der Kanten mit dem Endknoten v definiert. In gerichteten Graphen entspricht der Ausgangsgrad der Anzahl der Ausgangsinzidenzen am Knoten v. Der Eingangsgrad entspricht der Anzahl der Eingangsinzidenzen an v.

In einem schlichten Graph $G=(V;E)$ heißt eine Folge von $n+1$ Knoten $v_0, v_1, ..., v_n$ aus V **Kantenzug**, wenn jeweils zwei hintereinanderliegende Knoten der Folge durch eine Kante $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ für $i = 0, ..., n-1$ verbunden sind. Die Länge des Kantenzugs ist n. Ist der Anfangsknoten der Folge mit dem Endknoten der Folge identisch ($v_0 = v_n$), so ist der Kantenzug ein **Zyklus**. Ist dies nicht der Fall, dann handelt es sich um einen **Weg**. Wenn die Kanten eines Kantenzugs paarweise verschieden sind, ist dies ein einfacher Weg oder im geschlossenen Fall ein einfacher Zyklus. Es ist darauf zu achten, daß die Folge der Knoten nur in Richtung der Kanten möglich ist. Wenn zusätzlich die Knoten des Weges beziehungsweise des Zyklus paarweise verschieden sind, dann ergibt sich ein elementarer Weg oder Pfad beziehungsweise ein elementarer Zyklus. Für Kantenzüge in bipartiten Graphen $G = (V_1, V_2; R_{12}, R_{21})$ gilt prinzipiell dasselbe wie bei schlichten Graphen, bis auf den Unterschied, daß die Knoten abwechselnd aus der ersten Menge V_1 und der zweiten Menge V_2 kommen müssen.

Zwei Knoten u und v eines Graphen G heißen verbindbar, wenn es einen Kantenzug von u nach v gibt. G heißt **zusammenhängend**, wenn je zwei Knoten von G verbindbar sind. Ist der Graph nicht zusammenhängend, so besteht er aus mehreren Zusammenhangskomponenten, in denen jeweils wieder alle Knoten miteinander verbunden sind. Sind zwei Knoten u und v in derselben Zusammenhangskomponente, so gibt es offensichtlich einen Weg kürzester Länge zwischen u und v. u und v haben dann den **Abstand** $dist = dist(v,u)$ (englisch "distance").

Ein Graph, der keine Zyklen hat, heißt **azyklisch**. Ein zusammenhängender azyklischer Graph, bei dem man von einem Knoten zu jedem anderen Knoten über genau einen Weg gelangt, heißt **Baum**. Ein Baum mit n Knoten hat $n-1$ Kanten. Jeder Knoten eines Baumes mit dem Ausgangsgrad 0 heißt Blatt und mit dem Eingangsgrad 0 heißt Wurzel. Ein **Wald** ist ein Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind.

In vielen Anwendungen sind Gewichtungen der Kanten notwendig, um etwa die Zeit oder Weglänge festzuhalten, die man für das "Durchqueren" der Kante benötigt. Graphen mit gewichteten Kanten werden **gewichtete Graphen** genannt. Die Gewichtung für einen schlichten Graph $G=(V;E)$ erfolgt im allgemeinen durch eine Gewichtsfunktion $l: E \to \mathbb{R}$, die jeder Kante e einen reellen Wert $l(e)$ zuordnet. Für bipartite Graphen gilt sinngemäß dasselbe.

Ist W ein Weg in G, so ist die Länge $l(W)$ des Weges W definiert als die Summe der Gewichtungen aller Kanten von W:

$$l(W) = \sum_{i=1}^{k} l(e_i)$$

Der Weg W' mit der minimalsten Länge $l(W')$ aller Wege eines gewichteten Graphen vom Knoten u zum Knoten v heißt **kürzester Weg** von u nach v. Die Länge des kürzesten Weges von u nach v beziehungsweise deren minimaler Abstand, wird durch folgende Funktion angegeben:

$$dist(u,v) = \begin{cases} 0 & \textit{falls } u = v \\ \min\{(l(W) : \textit{ W ist ein Weg von u nach v}\} & \textit{falls ein solcher Weg existiert} \\ \infty & \textit{sonst} \end{cases}$$

3. Wegenetze in Karten mit unterschiedlichen Maßstäben

Um ein hierarchisches Graphensystem zum Verfeinern und Vergröbern von Strukturen zu entwickeln, ist es aus Sicht des Ingenieurwesens sinnvoll, das Vergröbern und Verfeinern anhand einer praktischen Anwendung zu untersuchen. Eine sehr anschauliche Anwendung stellt die bildliche Darstellung von Wegenetzen in Karten mit unterschiedlichen Maßstäben dar. Die Wegenetze stellen Strukturen dar, die bei kleiner werdendem Maßstab immer genauer beschrieben werden.

In den nächsten drei Abschnitten dieses Kapitels werden zunächst grundsätzliche Eigenschaften von Karten erarbeitet. Dann erfolgt die maßstäbliche Darstellung von Wegen. Schließlich werden die Zusammenhänge zwischen den Wegenetzen in Karten mit unterschiedlichen Maßstäben untersucht.

3.1. Topographische und verkehrsspezifische Karten

Wegenetze werden meist in topographischen Karten oder speziellen Verkehrskarten bildlich dargestellt. Verkehrskarten sind zum Beispiel Straßen−, Eisenbahn−, Schiffs− oder Flugroutenkarten. Die Karten unterscheiden sich thematisch entsprechend der spezifischen Aufgaben der Karten.

Topographische Karten

Topographische Karten sind amtliche Karten, die unter anderem von den Katasterämtern verwendet werden. Sie bilden möglichst vollständig, exakt und nach Lage und Höhe meßbar einen Ausschnitt der Erdoberfläche ab. Es werden Geländeformen, natürliche und politische Grenzen, Bodendeckungen (Vegetation), Flüsse, Wege, Siedlungen und eventuell (freistehende) Gebäude dargestellt (siehe Anlagen 2 bis 8).

Die Straßen−, Schienen− und Wasserwege werden in topographischen Karten möglichst genau abgebildet. Flüsse und Seen werden immer maßstäblich dargestellt, sodaß der genaue Verlauf und die Breite der Flüsse an jedem Ort deutlich zu erkennen sind. Die Gleise der Schienenstrecken werden dagegen meist zusammengefaßt und als eine schmale schwarze oder schwarzweiße Linie dargestellt. Haltestellen an Bahnhöfen werden oft durch ein definiertes Zeichen (zum Beispiel ein Rechteck) abgebildet. Die Wege des Straßennetzes unterscheiden sich durch die Breite der Linien, mit der sie dargestellt werden und die in großen Maßstäben ab zirka 1:200.000 nicht mehr der maßstäblichen Darstellung der Straße entspricht.

Da Schiffs− und Flugrouten keine topographischen Größen sind, werden sie in den Karten zur genauen Beschreibung der Erdoberfläche nicht dargestellt.

Straßenkarten

Straßenkarten zur Information von Kraftfahrzeugführern, Radfahrern oder Wanderern unterscheiden sich kaum von topographischen Karten. Die Unterschiede liegen zum einen in der Hervorhebung der Wege, zum anderen im Weglassen von unwichtigen und eher irritierenden Darstellungen, wie Höhenlinien, sowie im Hinzufügen von Zusatzinformationen, wie Straßenabschnittslängen oder touristische Sehenswürdigkeiten (siehe Anlagen 15 bis 21). Die Hervorhebung der Wege geschieht durch eine größere Breite der Linien zur Darstellung der Wege und durch eine Einfärbung der Linien mit prägnanten Farben wie Rot oder Gelb. Autobahnen werden beispielsweise durch zwei rote nebeneinanderverlaufende Linien und ein blaues Rechteck mit der Autobahnnummer dargestellt. Die möglichen Abfahrten werden durch Kreise und Anschlußstellennummern abgebildet. Die Breite der Linien von Autobahnen ist meist ebenso unmaßstäblich, wie die der Linien von Nebenstraßen.

Während Eisenbahnlinien in Straßenkarten oft weggelassen werden, sind Schiffslinien sowie Linien von Auto– und Personenfähren meist als gestrichelte Linien dargestellt.

Eisenbahnkarten

Eisenbahnkarten werden hauptsächlich zur Information der Fahrgäste im Personenverkehr verwendet. Sie stellen meist in einem großen Maßstab das Haupteisenbahnnetz eines Staates wie der Bundesrepublik Deutschland grob dar. Neben den Staatsgrenzen und den Flüssen werden lediglich wichtig Städte mit Bahnhöfen und Strecken, die diese Städte verbinden, dargestellt (siehe Anlage 22).

Jeder Schienenstrecke ist eine Nummer zugeordnet, um diese Strecken in den Fahrplantabellen wiederzufinden. Die Strecken sind wie in Straßenverkehrskarten durch unterschiedlich breite Linien in Strecken für den Nahverkehr oder den Fern– und Nahverkehr eingeteilt. Eisenbahnfähren und Bussanschlüsse sind in den Karten als gestrichelte Linien enthalten.

Für Untersuchungen von Eisenbahnwegen in kleinen Maßstäben eignen sich am besten topographische Karten.

Schiffs– und Flugroutenkarten

Karten zur Information von Schiffs– und Fluggästen beschreiben meist nur Orte mit Häfen oder Flughäfen in Form kleiner Kreise. Eine mögliche Verbindung dieser Orte mit einer Schiffs– oder Flugroute wird oft nur durch eine Strecke zwischen den Kreisen dargestellt. Häufig werden diese Wegenetze, ebenso wie Netze für den Eisenbahn– oder Stadtbahnverkehr, auf Karten dargestellt, die sich nicht an die geometrischen Gegebenheiten topographischer Karten halten, sondern schematisch die Haltestellen und Linien abbilden (siehe Anlage 25). Auf diese Weise können die Informationen für die Fahrgäste leichter verständlich gemacht werden.

3.2. Zur maßstäblichen Darstellung von Wegen

Realistische maßstäbliche Darstellungen der Erdoberfläche und somit auch von Wegenetzen werden durch Satellitenaufnahmen ermöglicht. Eine solche Satellitenaufnahme mit einem Ausschnitt aus Niedersachsen im Maßstab 1:500.000 zeigt die Anlage 1.

Auf der Aufnahme ist die grobe Oberflächenbeschaffenheit, wie etwa die Berghänge im Harz oder die grüngefärbte Eilenriede in Hannover, deutlich erkennbar. Besonders gut zu sehen sind Seen und Flüsse, wie der Maschsee in Hannover oder die Weser. Städte erscheinen als rote Flächen. Mit Ausnahme des Rollfeldes des Flughafen Langenhagen bei Hannover sind keine Einzelbauwerke zu erkennen. In Osten von Hannover ist ein Ausschnitt der A2 als dünne helle Linie zu sehen. Ansonsten sind keine Straßen sichtbar.

Die maßstäbliche Darstellung von Wegen ist, wie die Darstellung von kleinen Ortschaften oder Einzelbauwerken, wegen ihrer geringen Ausdehnung auf Karten mit großen Maßstäben nicht möglich. Während etwa in Karten mit einem Maßstab von 1:1000 sogar die beiden Schienen eines Stadtbahngleises darstellbar sind (siehe Anlage 8), ist zum Beispiel die maßstäbliche Abbildung des Straßennetzes auf einer Deutschlandkarte undenkbar.

Beim Vergleich der Satellitenaufnahme in Anlage 1 mit der entsprechenden topographischen Übersichtskarte in Anlage 2, die denselben Ausschnitt Niedersachsens in demselben Maßstab abbildet, wird die Darstellungsmethodik für Karten mit großen Maßstäben deutlich.

Flächen, wie die Oberfläche des Steinhuder Meers, des bebauten Gebiets von Hannover oder der Eilenriede, die für den Maßstab der Karte eine sichtbare Ausdehnung haben, werden maßstäblich abgebildet. Flächen, deren Ausdehnung für den Maßstab zu gering sind, die topographisch jedoch wichtig sind, wie etwa die Ortschaft Hessisch Oldendorf oder der Sendeturm auf dem Brocken, werden durch festgelegte Symbole dargestellt (Das Symbol für Höhenpunkte ist zufällig ein Punkt).

Wege wie große Flüsse, deren Breite im Maßstab der Karte darstellbar sind, werden maßstäblich abgebildet. Wege, die für die Karte wichtig, deren Breiten aber zu gering für den Maßstab sind, werden durch festgelegte symbolische Linienzüge dargestellt.

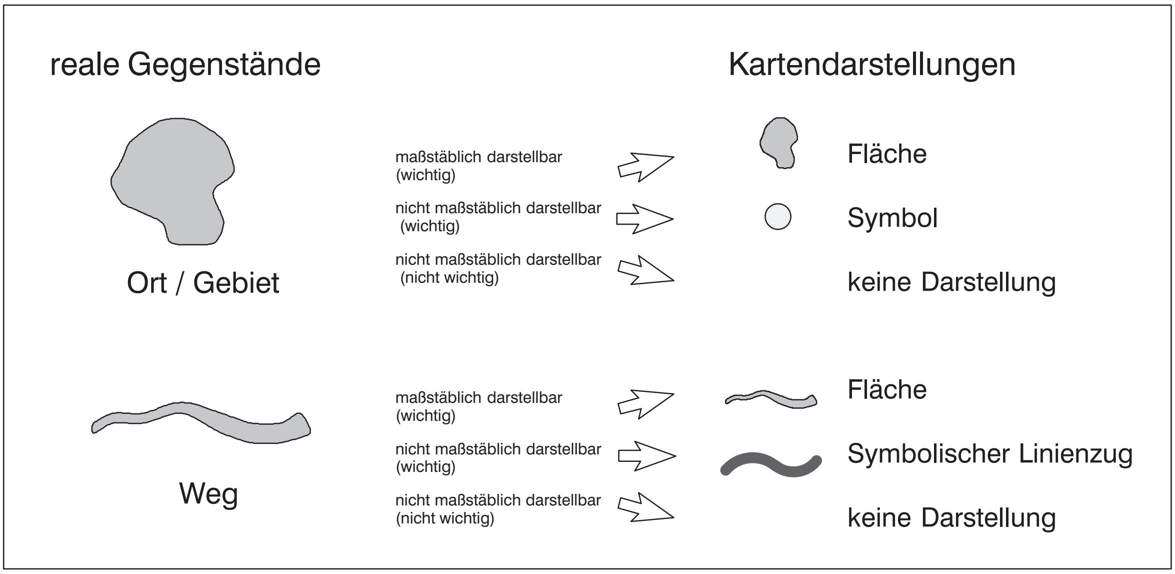


Bild 5: Abbildung von Orten und Wegen als maßstäbliche oder symbolische Darstellung

Welche Orte und welche Wege für eine Karte wichtig sind, hängt von der Einstufung in eine Kategorie und der Dichte der dargestellten Orte und und Wegenetze ab. Alle Orte und Wege werden nach einem Kriterium, zum Beispiel der Einwohnerzahl oder der Verkehrsbelastung, kategorisiert. Je nachdem, wieviel Platz die Karte für die Darstellung aller Orte oder Wege der höchsten noch nicht abgebildeten Kategorie bieten kann, werden diese Orte beziehungsweise Wege dargestellt oder weggelassen.

3.3. Zusammenhänge zwischen Wegenetzdarstellungen in Karten mit unterschiedlichen Maßstäben

Die Darstellung von Wegenetzen ist abhängig vom Maßstab der Karte, in der sie abgebildet werden. Eine Karte mit einem großen Maßstab erlaubt die Wahl eines großen Ausschnitts von der Erdoberfläche, beschränkt jedoch eine genaue Beschreibung der Wege. Eine Karte mit einem kleinen Maßstab erlaubt nur die Wahl eines kleinen Ausschnitts, bietet aber die Möglichkeit, die Wege detailliert darzustellen.

Wegenetze können entweder maßstäblich oder symbolhaft dargestellt werden. Maßstäbliche Darstellungen erfordern eine in einem Maßstab abbildbare Ausbreitung. Die Wege müssen daher als langgestreckte Flächen aufgefaßt und als solche in der Karte erkennbar sein. Maßstäbliche Darstellungen von Wegenetzen bieten sich bei kleinen bis mittleren Maßstäben von 1:1000 bis 1:100.000 an. Symbolhafte Darstellungen von Wegenetzen geben eine ungefähre Beschreibung der Verbindung zwischen zwei bestimmten Orten als symbolische Linienzüge wieder. Diese Form der Wegeabbildung ist unter anderem auch für große Maßstäbe geeignet, in denen die Wege maßstäblich nicht erkennbar sind.

Zusammenhänge der maßstäblichen Darstellungen von Wegenetzen in Karten mit unterschiedlichen Maßstäben lassen sich gut an topographischen Karten mit Maßstäben von 1:100.000 und kleiner zeigen. Ein Beispiel hierzu bieten die topographischen Karten in den Anlagen 3 bis 8. Sie stellen denselben Ausschnitt (mit dem Institut für Bauinformatik) in den Maßstäben 1:100.000, 1:50.000, 1:20.000, 1:10.000, 1:5000 und 1:1000 dar. Um die Ausschnitte besser vergleichen zu können, wurden sie alle auf die Größe des Ausschnitts mit dem kleinsten Maßstab transformiert (siehe Anlagen 9 bis 14).

Die Veränderung der Wege beim Übergang von einem Maßstab zu einem anderen ist leicht zu erkennen. Da in maßstäblichen Darstellungen nur Gegenstände mit einer Mindestausdehnung abgebildet werden können, beschreiben sie ausschließlich Flächen. Während in der Karte mit dem Maßstab 1:100.000 nur wenig Flächen dargestellt werden, sind in der Karte mit dem Maßstab 1:1000 sehr viele Flächen beschrieben. Weil die Fläche des Ausschnitts in jeder Karte die gleiche Größe besitzt, kommt in den Karten mit kleineren Maßstäben keine Fläche hinzu, sondern die Flächen in den Karten mit einem größeren Maßstab werden in kleinere Flächen *aufgeteilt*. Der Übergang von Karten mit kleinem Maßstab zu solchen mit großem Maßstab entspricht einer *Zusammenfassung*.

Die Aufteilung großer Flächen in kleine ist eine **Verfeinerung**. Die Zusammenfassung von kleinen Flächen zu einer großen entspricht einer **Vergröberung**. Daher stellt der Zusammenhang zwischen den maßstäblichen Darstellungen von Wegenetzen in Karten mit unterschiedlichen Maßstäben eine Vergröberung beziehungsweise eine Verfeinerung von Flächen dar (siehe Abbildung 6).

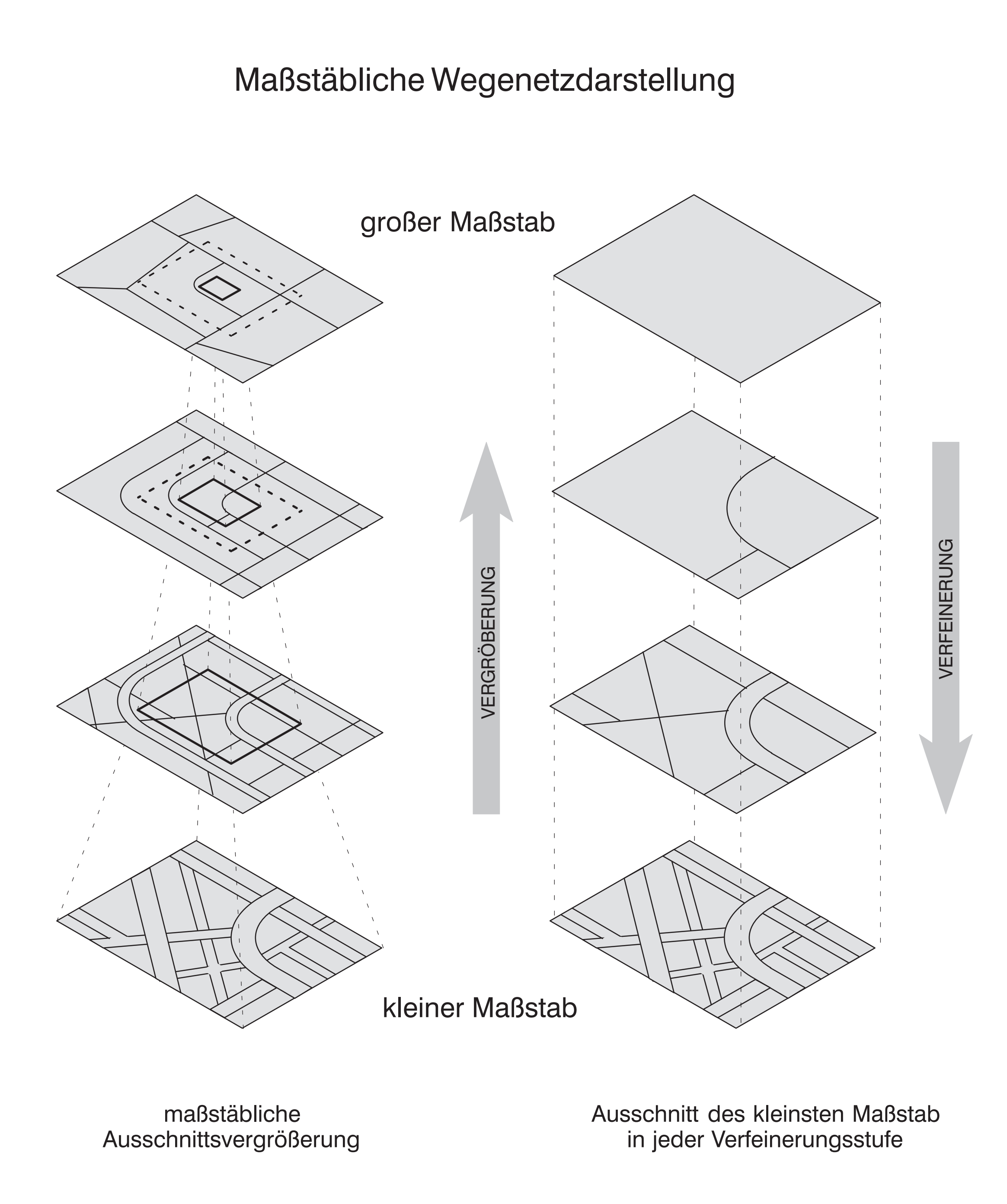


Bild 6: Vergröberung und Verfeinerung von maßstäblichen Wegenetzdarstellungen

Verkehrskarten und Programmsysteme zur Beschreibung von Wegenetzen verwenden in der Regel eine symbolhafte Darstellung der Wege. Als Beispiel zur Untersuchung der Zusammenhänge dieser Darstellungsform in Karten mit unterschiedlichen Maßstäben dienen die Straßenkarten in den Anlagen 15 bis 21. Die Karte mit dem größten Maßstab (1:4.500.000) beschreibt das Hauptstraßennetz von Mitteleuropa und die Karte mit dem kleinsten Maßstab 1:11.000 bildet das Straßennetz der Innenstadt von Hannover ab.

Bei Vernachlässigung aller maßstäblichen Darstellungen, etwa von Gebieten oder Flüssen, wird auch im Fall der symbolhaften Beschreibung der Wegenetze die Veränderung beim Übergang zwischen den Maßstäben gut deutlich.

In der Karte mit dem Maßstab 1:4.500.000 sind im Bereich Hannover die Autobahnen A2, A7 und A352 sowie die Bundesstraßen B3, B6 und B217 zu erkennen. In der Karte mit dem nächst kleineren Maßstab 1:750.000 sind die Autobahnen A2, A7 und A352, die Bundesstraßen B3, B6, B65, B188, B217 und B441 sowie die Hauptstraßen Schulenburger Landstraße, Varenwalder Straße, Podbielskistraße, Hans–Böckler–Allee und Tiergartenstraße zu sehen. Beim Maßstab 1:400.000 treten zusätzlich zu den beim Maßstab 1:750.000 genannten Straßen weitere Hauptstraßen und ein paar wichtige Nebenstraßen auf. Die Innenstadtkarte (1:11.000) zeigt alle Straßen, die im gewählten Ausschnitt real vorhanden sind.

Der Übergang von einem großen zu einem kleinen Maßstab entspricht für die Wegenetze also einem *Hinzufügen* von Wegen und der Übergang von einem kleinen zu einem großen Maßstab einem *Entfernen* von Wegen. Durch das Hinzufügen wird die Struktur des Wegenetzes verkleinert beziehungsweise reduziert. Durch das Entfernen wird sie vergrößert beziehungsweise expandiert. Daher stellt der Zusammenhang zwischen den symbolhaften Darstellungen von Wegenetzen in Karten mit unterschiedlichen Maßstäben eine **Reduktion** beziehungsweise eine **Expansion** von Strukturen dar (siehe Abbildung 7).

Meist wird das Reduzieren und Expandieren der Wegenetzstruktur systematisch durchgeführt, indem die einzufügenden beziehungsweise zu entfernenden Wege entsprechend einer festgelegten Kategorisierung ausgewählt werden. So sind beispielsweise alle Autobahnen vor den Bundes– und Landstraßen abbildbar. Die Eisenbahnstrecken können auf Wunsch dargestellt oder weggelassen werden.

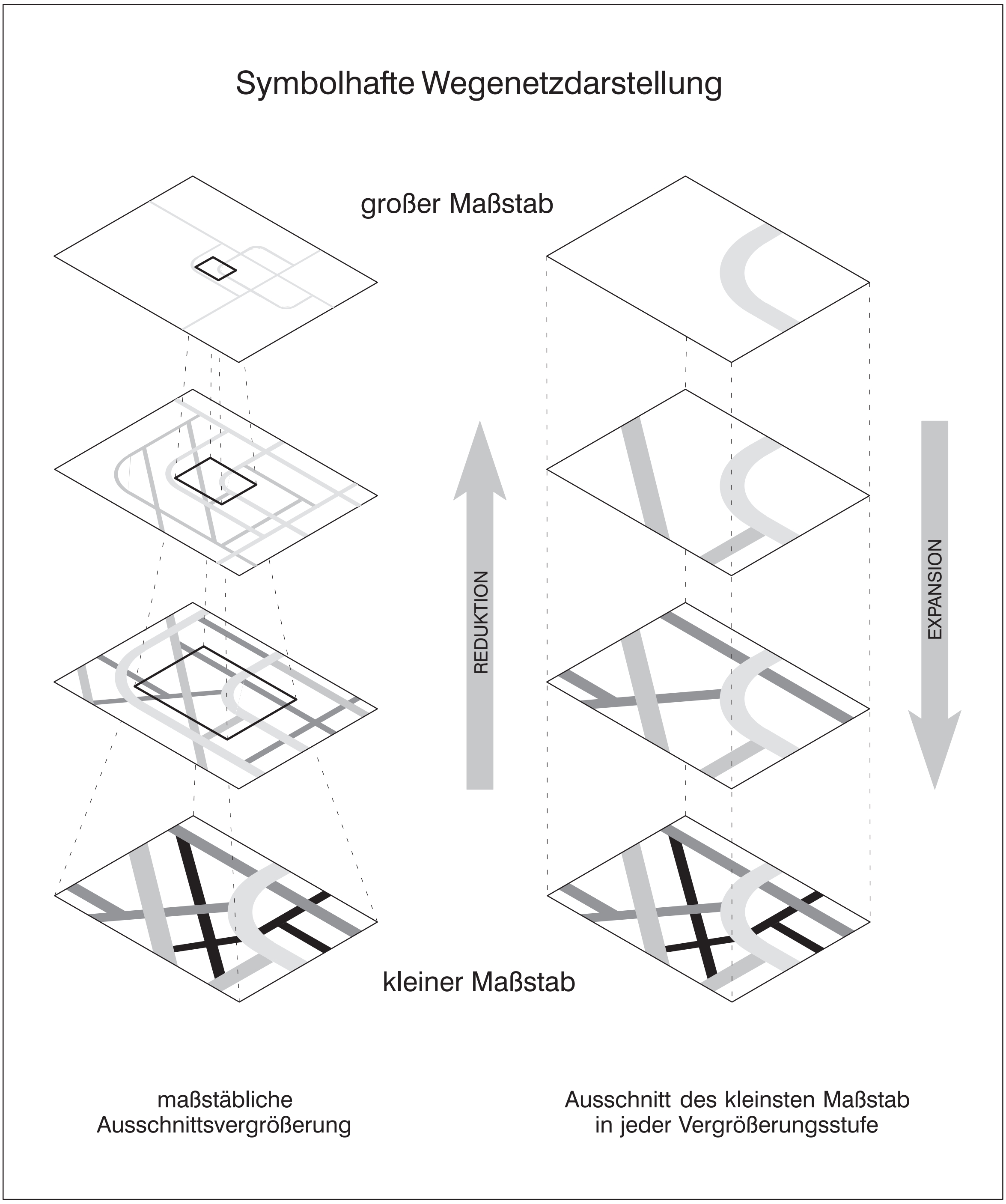


Bild 7: Reduktion und Expansion von symbolhaften Wegenetzdarstellungen

4. Darstellung von Wegenetzen mit Graphen

Wegenetze lassen sich mit Hilfe von Graphen darstellen. Grundsätzlich ist nicht festgelegt, ob das Wegenetz mit einem schlichten, einem bipartiten oder einem gerichteten Graph zu beschreiben ist. Da die drei Graphentypen jeweils unterschiedliche Möglichkeiten bieten, sind hiermit unterschiedliche Darstellungen der Wegenetze realisierbar. Abhängig von der Anwendung, für die das Wegenetz benötigt wird, sollte die Wegenetzdarstellung, und damit der entsprechende Graph, gewählt werden. So ist bei der Lösung eines Problems in einer Anwendung mit Wegenetzen zunächst zu klären, ob eine maßstäbliche oder eine symbolhafte Darstellung der Wege notwendig und welcher Graph hierzu am zweckmäßigsten ist.

In diesem Kapitel wird deutlich, daß für eine maßstäbliche Darstellung eines Wegenetzes sinnvollerweise ein schlichter Graph gewählt werden sollte, da nur die Geometrie von Flächen sowie die Topologie ihrer Lage zueinander relevant ist. Bipartite Graphen sind für maßstäbliche Wegenetzdarstellungen wenig zweckmäßig.

Symbolhafte Wegenetzdarstellungen, in denen nur die Eigenschaften (wie die Geometrie) von Orten und möglichen Verbindungen zwischen diesen Orten relevant sind, können zweckmäßigerweise ebenfalls schlichte Graphen aus. Müssen jedoch die Eigenschaften sowohl der Orte als auch der Wege und deren Beziehungen zueinander beschrieben werden, wie dies bei Straßennetzdarstellungen meist unabdingbar ist, kommt hierfür nur ein bipartiter Graph in Frage. Sind dabei besonders die Eigenschaften der Wegerichtung von Interesse, so sollten gerichtete Graphen verwendet werden.

Aus der vergleichenden Untersuchung in den drei Abschnitten 4.1 bis 4.3 dieses Kapitels werden die Möglichkeiten sowie die Vor– und Nachteile von schlichten, bipartiten und gerichteten Graphen zur Wegenetzdarstellung imeinzelnen deutlich.

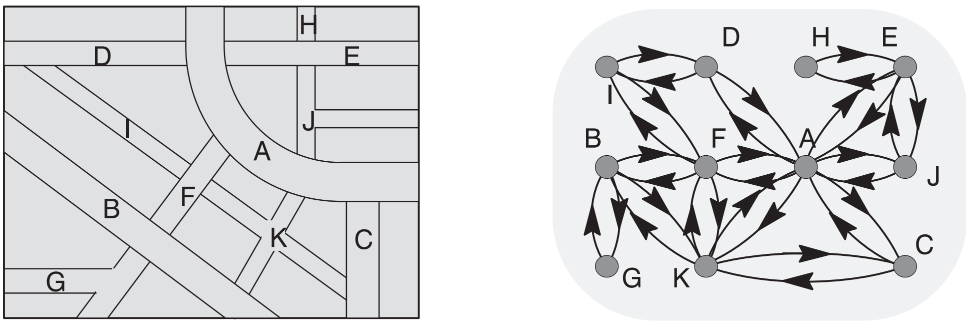
4.1. Darstellung von Wegenetzen mit schlichten Graphen

Ein schlichter Graph $G=(V;E)$ bietet die Möglichkeit, die Struktur, die einer Menge V aufgeprägt ist, durch eine Relation E abzubilden. Für die Darstellung von Wegenetzen mit schlichten Graphen stellt sich daher die Frage, welche Elemente des Wegenetzes die Knoten der Menge V bilden, und welche Bedeutung die Beziehung zwischen diesen Elementen besitzt.

Es gibt einen prinzipiellen Unterschied zwischen maßstäblichen und symbolhaften Wegenetzdarstellungen mit schlichten Graphen. In einer maßstäblichen Wegenetzdarstellung existieren ausschließlich überschneidungsfreie Flächen. Daher kann eine solche maßstäbliche Darstellung vollständig durch einen schlichten Graph beschrieben werden, indem die Flächen durch die Knoten des Graphen abgebildet werden. In einer symbolhaften Wegenetzdarstellung bestehen Wegenetze grundsätzlich aus Orten, wie Verkehrsknotenpunkte im Straßenverkehrswesen, und Wege zwischen diesen Orten. Bei der Beschreibung einer symbolhaften Wegenetzdarstellung durch einen schlichten Graph G ist daher immer die Entscheidung zu treffen, ob die Orte die Elemente der Menge V bilden und damit die Eigenschaften der Wege wegfallen, oder ob die Wege die Knoten von G bilden und damit die Eigenschaften der Orte wegfallen.

Maßstäbliche Wegenetzdarstellungen

Bei der maßstäblichen Wegenetzdarstellung mit einem schlichten Graph $G=(V;E)$ stellen die Knoten der Menge V die überschneidungsfreien Flächen dar, aus denen die maßstäbliche Darstellung besteht. Die Relation E beschreibt die Beziehung zwischen den Knoten; daß heißt, zwischen den Flächen. Die Beziehung ist durch die Lage der Flächen zueinander gegeben, sodaß mit einer Kante $e \in E$ von einem Knoten $u \in V$ zu einem Knoten $v \in V$ ausgesagt wird: ”Die Fläche u liegt neben der Fläche v” beziehungsweise ”Die Fläche u hat eine gemeinsame Randlinie (kein Randpunkt) mit der Fläche v”.



Ausschnitt einer maßstäblichen Wegenetzdarstellung

schlichter Graph zum Ausschnitt der maßstäblichen Wegenetzdarstellung

(Die Flächen zwischen den Wegflächen sind im Graph nicht abgebildet.)

Bild 8: Maßstäbliche Wegenetzdarstellung mit einem schlichten Graphen

In dieser Darstellungsform beschreibt der schlichte Graph nicht notwendigerweise eine sinnvolle Struktur des Wegenetzes, sondern lediglich die Struktur der Lage der Flächen zueinander. Da die Flächen, bis auf die Überschneidungsfreiheit, keinen topologischen, sondern nur geometrischen Gegebenheiten Rechnung tragen müssen, kann der Graph für die Flächenlage nicht zwingend eine Wegenetzdarstellung sein. Wenn beispielsweise alle Wege als eine zusammenhängende Fläche dargestellt werden (was geometrisch durchaus korrekt ist), so besteht der schlichte Graph für die Struktur des Wegenetzes aus einem einzigen Knoten (siehe Abbildung 9, links). Eine bessere topologische Beschreibung von Wegenetzen bieten symbolhafte Wegenetzdarstellungen.

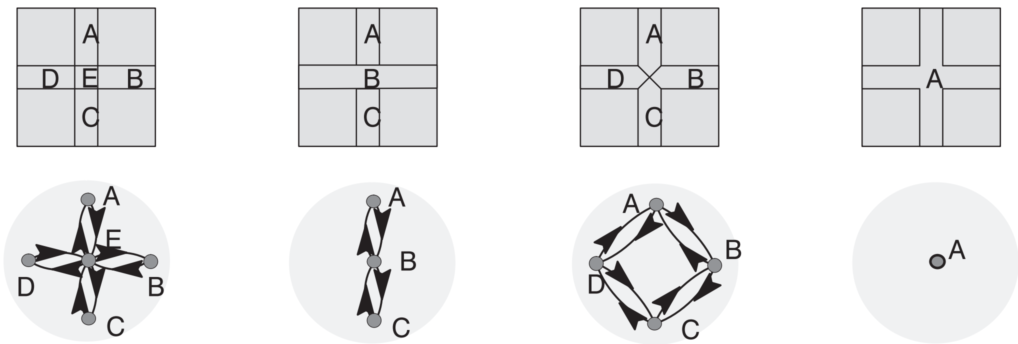


Bild 9: Schlichte Graphen von geometrisch identischen maßstäblichen Wegenetzdarstellungen

Symbolhafte Wegenetzdarstellungen

Weil symbolhafte Wegenetzdarstellungen möglichst maßstabsunabhängig sein sollen, beschreiben sie in erster Linie nicht geometrische, sondern topologische Eigenschaften der Netze. Dadurch ist bei einer Rückführung einer solchen Darstellung auf einen Graph die Wegenetzstruktur im Gegensatz zur maßstäblichen Darstellung tatsächlich abbildbar.

Für schlichte Graphen ergibt sich jedoch das Problem, daß symbolhafte Wegenetzdarstellungen für die genaue topologische Beschreibung des Netzes zwei grundlegende Mengen für ausgewählte Orte und ortsverbindende Wege benötigen. Schlichte Graphen stellen hierfür aber nur eine Knotenmenge zur Verfügung.

Eine mögliche Zusammenfassung von Orten, wie Verkehrsknotenpunkte im Straßenverkehrswesen, und Wegen, wie Straßen zwischen den Knotenpunkten, sollte für eine Wegenetzdarstellung nicht verwendet werden, da die Eigenschaften der punktuellen Orte und der linienhaften Wege zu unterschiedlich sind.

Schlichte Graphen bieten sich für Wegenetze nur dann an, wenn entweder die Eigenschaften der Wege oder aber die der Orte für die Anwendung nicht notwendig sind. So lassen sich beispielsweise Schiffs– oder Flugroutenkarten besonders gut mit schlichten Graphen darstellen. Die Orte mit Häfen beziehungsweise Flughäfen werden dabei durch die Knoten des Graphen abgebildet. Die Schiffs– oder Flugverbindungen zwischen den Orten stellen die Kanten dar. Eine Beschreibung der Verbindungen (zum Beispiel Reisezeit, Streckenlänge, Flugliniennummer, ...) ist nicht möglich, wenn für die Darstellung ungewichtete Graphen verwendet werden. Es existiert im entsprechenden Graph nur die Information, daß eine Verbindung von einem Ort A zu einem Ort B mit einem Schiff beziehungsweise einem Flugzeug besteht oder nicht.

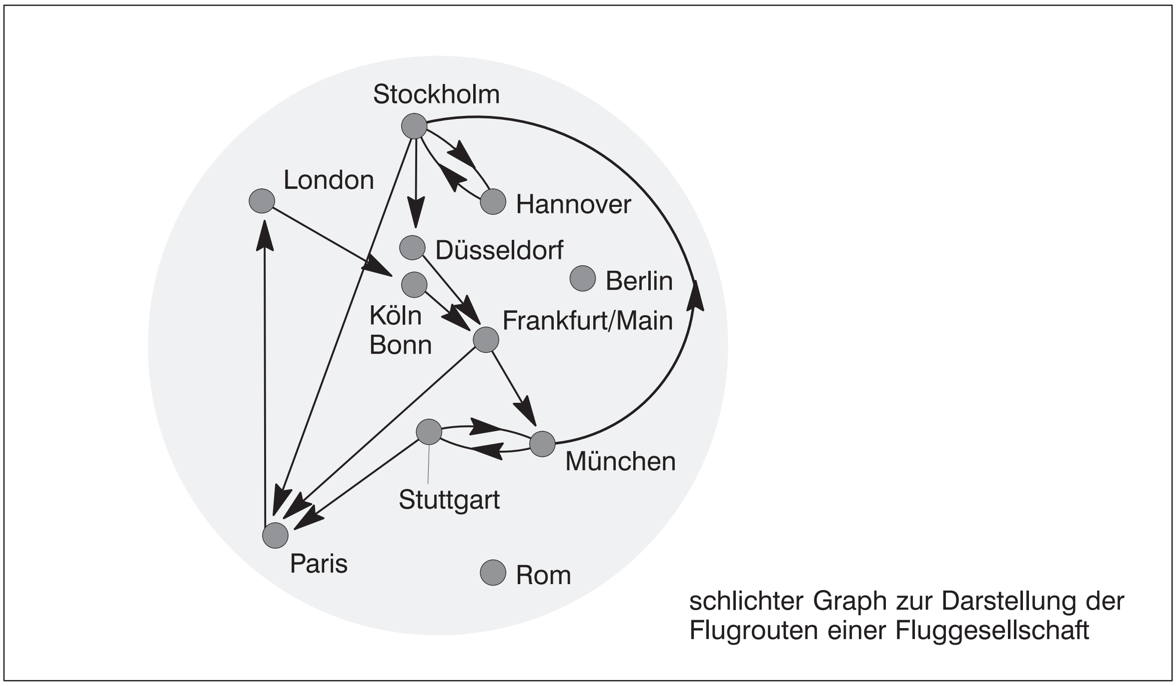


Bild 10: Flugroutennetzdarstellung mit einem schlichten Graphen

In Straßennetzen sind die Orte des Wegenetzes meist die Verkehrsknotenpunkte im Straßensystem. Es bietet sich an, sie im schlichten Graph als Knoten zu beschreiben. Alle Orte im Wegenetz, wo mindestens zwei Straßen, etwa als Einmündung oder Kreuzung, aufeinandertreffen, sind Knoten im Graph. Die Straßen zwischen den Knotenpunkten sind dann in einem schlichten Graph nur noch als geordnete Paare der Relation darstellbar. So ist zwar die Abbildung von Einbahnstraßen möglich (nur eine Kante zwischen zwei Knoten), aber weitere Informationen über die Straßen sind nicht beschreibbar. Oft wird eine solche Straßennetzdarstellung knotenpunktorientierter (schlichter) Graph genannt (siehe Abbildung 11).

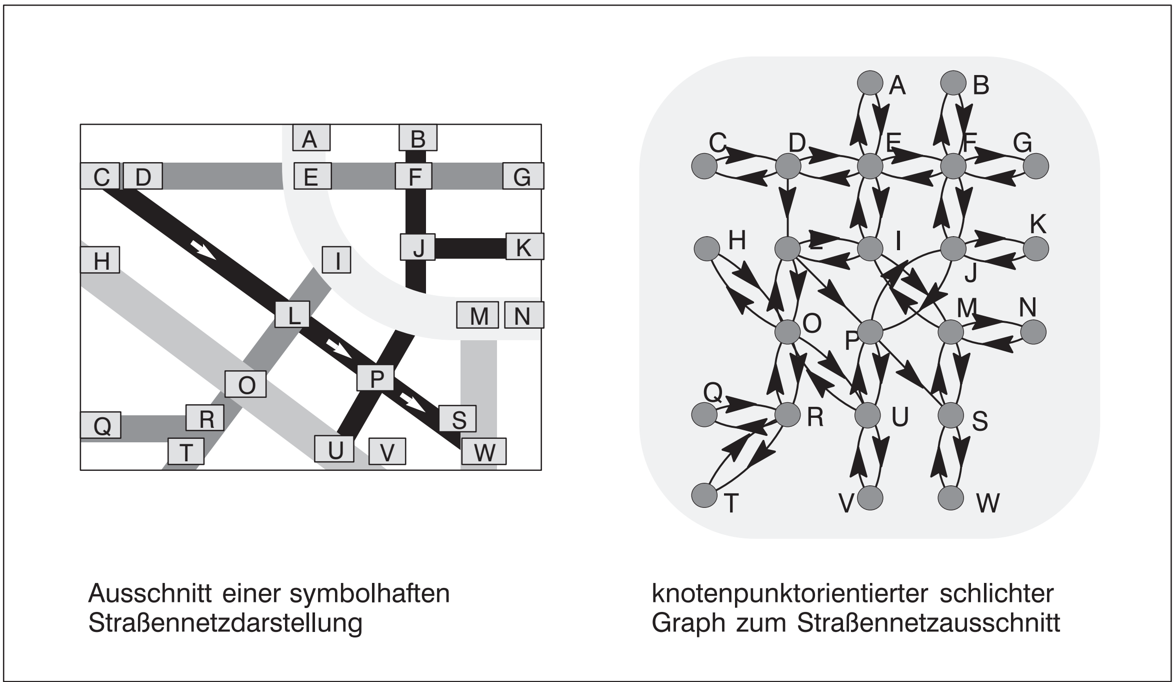
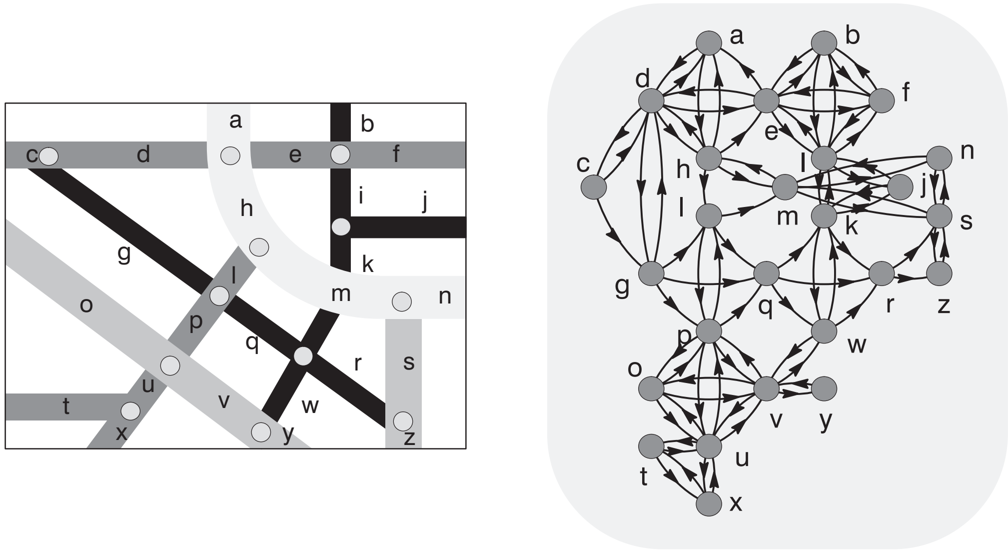


Bild 11: Straßennetzdarstellung mit einem knotenpunktorientierten schlichten Graph

Häufig sind im Straßenverkehrswesen die Abbiegebeziehungen an den Verkehrsknotenpunkten eines Straßennetzes von Interesse. Um diese Beziehungen zu modellieren, werden meist schlichte Graphen verwendet, in denen die Straßen zwischen den Knotenpunkten die Knoten des Graphen bilden und die Abbiegebeziehungen von einer Straße zu einer anderen als Kanten abgebildet werden. Ein solcher Graph wird oft streckenorientierter (schlichter) Graph gennannt (siehe Abbildung 12).

Um ein Straßennetz exakt darstellen zu können, sind bipartite Graphen notwendig, die sowohl die Knotenpunkt– als auch die Streckeneigenschaften und deren gegenseitige Beziehungen abbilden. Auf diese Weise können sowohl alle topologischen als auch geometrischen Eigenschaften der Orte und Wege beschrieben werden.



Ausschnitt einer symbolhaften Straßennetzdarstellung

streckenorientierter schlichter Graph zum Straßennetzausschnitt

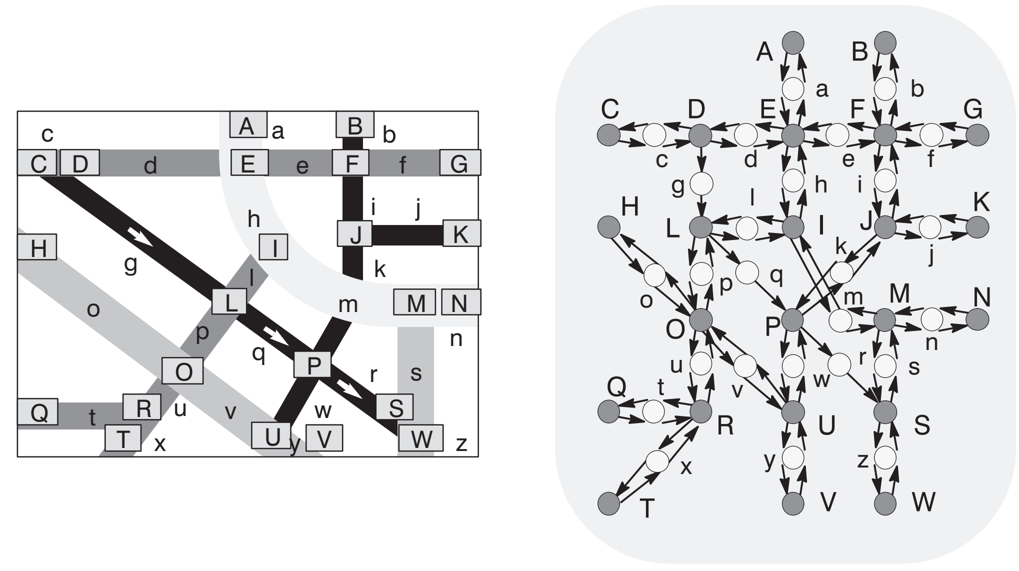
Bild 12: Straßennetzdarstellung mit einem streckenorientierten schlichten Graph

4.2. Darstellung von Wegenetzen mit bipartiten Graphen

Ein bipartiter Graph $G = (V_1, V_2\,; R_{12}, R_{21})$ bietet zwei Mengen V_1 und V_2, zwischen denen eine gegenseitige Beziehung durch die beiden Relationen R_{12} und R_{21} beschreibbar ist. Für die Darstellung von Wegenetzen kann die erste Menge V_1 identisch zur Menge eines schlichten Graphen aufgefaßt werden, während die zweite Menge V_2 die Möglichkeit bietet, die Eigenschaften der Verbindungen zwischen den Knoten aus V_1 darzustellen. Auf diese Weise sind auch mehr als jeweils zwei Knoten aus V_1 (wie bei Petri−Netzen) miteinander verbindbar. Dies kann zum Beispiel zweckmäßig sein, um eine Weiche in Schienenverkehrswesen abzubilden, was mit einem schlichten oder einem gerichteten Graph nicht möglich ist. Ein bipartiter Graph reicht aus, um ein Verkehrsnetz topologisch und geometrisch exakt darzustellen.

Maßstäbliche Wegenetzdarstellungen bestehen ausschließlich aus Flächen und besitzen daher nur eine Menge. Ihre Beschreibung durch einen bipartiten Graph ist somit wenig sinnvoll.

Das Defizit schlichter Graphen bei der symbolhaften Wegenetzdarstellung, für die beiden Mengen von Orten und ortsverbindenden Wegen nur eine Knotenmenge zu Verfügung stellen zu können, wird mit bipartiten Graphen behoben. Mit der ersten Menge V_1 können die Orte und mit der zweiten Menge V_2 die Wege abgebildet werden. Die Zusammenhänge in Wegenetzen werden durch die Kanten zwischen den Elementen aus V_1 und V_2 oder aus V_2 und V_1 hergestellt. Bei Straßenverkehrsnetzen ist zum Beispiel keine Unterscheidung in knotenpunkt− und streckenorientierte Graphen notwendig.



Ausschnitt einer symbolhaften
Straßennetzdarstellung

bipartiter Graph zum
Straßennetzausschnitt

Bild 13: Straßennetzdarstellung mit einem bipartiten Graph

4.3. Darstellung von Wegenetzen mit gerichteten Graphen

Die Einschränkung eines bipartiten Graphen auf einen gerichteten Graph $G = (V, A\,; R_{VA}, R_{AV})$ bietet die Möglichkeit der direkten Übertragung eines schlichten auf einen bipartiten Graph. Dabei bleiben die Knoten der Menge V erhalten und jede Kante des schlichten Graphen wird durch einen Pfeil aus A mit der entsprechenden Ausgangsinzidenz aus R_{VA} und der entsprechenden Eingangsinzidenz aus R_{AV} ersetzt. Auf diese Weise sind die Eigenschaften der Verbindung von jeweils einem Knoten aus V zu einem anderen aus V beschreibbar.

Der Vorteil der direkten Übertragbarkeit eines schlichten auf einen gerichteten Graph wird durch den Nachteil, daß die beiden Mengen des gerichteten Graph nicht gleichwertig sind, relativiert. Es ist nicht möglich, Orte und Wege gleichzeitig zu beschreiben. Entweder erfolgt nur eine Beschreibung der Orte und Wegrichtungen, oder aber nur der-Wege und Abbiegebeziehungen. Durch die Richtung der Pfeile ist etwa bei gerichteten Graphen zur symbolhaften Straßennetzdarstellung wie bei schlichten Graphen zwischen knotenpunkt– und streckenorientierten Graphen zu unterscheiden.

In streckenorientierten gerichteten Graphen werden die Wege im Wegenetz durch die Knoten im Graph und die Abbiegebeziehungen durch die Pfeile abgebildet. Ob ein solcher Graph zweckmäßig ist, sollte innerhalb einer Anwendung untersucht werden.

In knotenpunktorientierten gerichteten Graphen und gerichteten Graphen für Schiffs– oder Flugroutenkarten bilden die Knoten die Verkehrsknotenpunkte, beziehungsweise die Orte im Wegenetz, ab. Die Pfeile bilden eine Wegrichtung von jeweils einem Ort zu einem anderen ab. Ein Bundesstraßenabschnitt zwischen zwei Verkehrsknotenpunkten ist zum Beispiel mit einem gerichteten Graph durch zwei entgegengesetzt gerichtete Pfeile mit den entsprechenden Inzidenzkanten zwischen denselben Knoten darstellbar.

Die Besonderheit von gerichteten Graphen, im Gegensatz zu schlichten Graphen, parallele und partitielle Pfeile abbilden zu können, erlaubt es beispielsweise, zwei nebeneinanderliegende Richtungsfahrbahnen einer Autobahn oder eine sich im Bau befindliche Straße darzustellen.

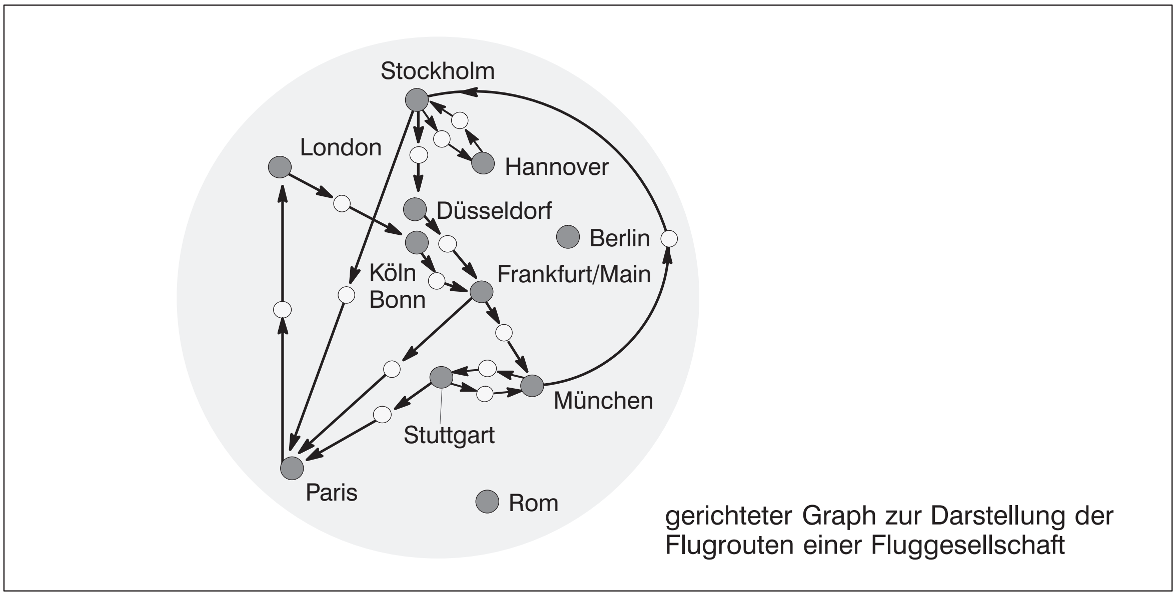


Bild 14: Flugroutennetzdarstellung mit einem gerichteten Graphen

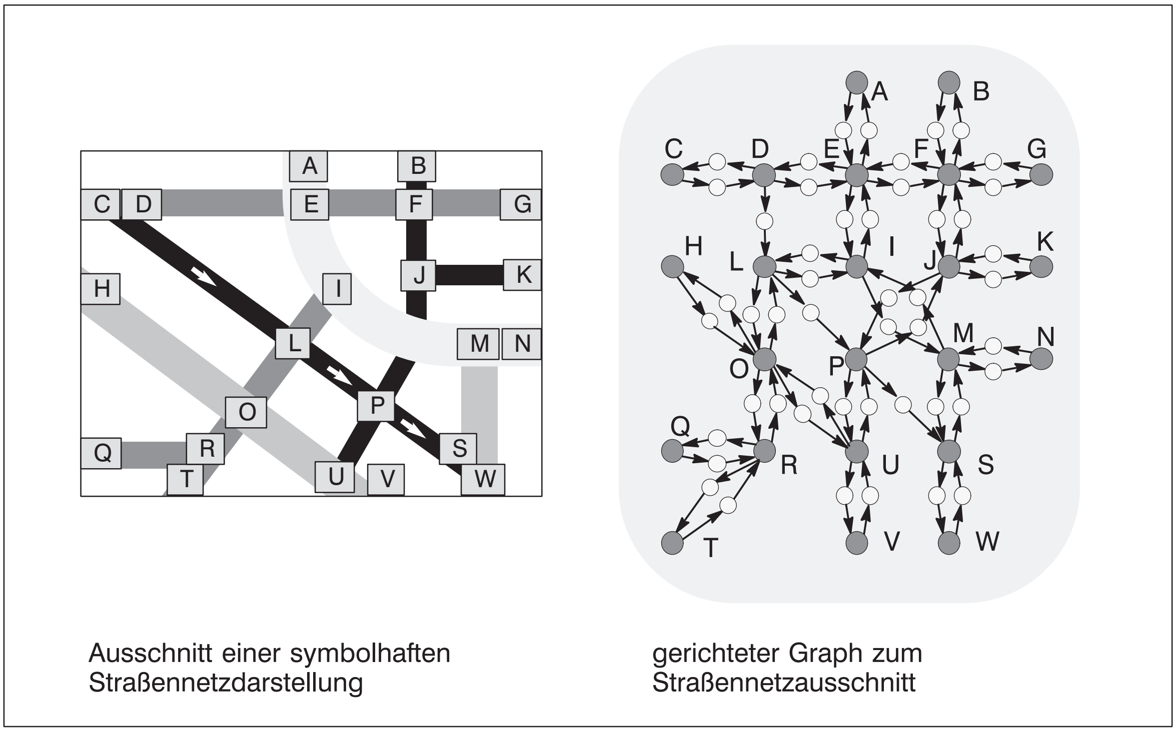


Bild 15: Straßennetzdarstellung mit einem knotenpunktorientierten gerichteten Graph

5. Vergröbern und Verfeinern von Graphen

Aus den Untersuchungen der maßstäblichen und symbolhaften Wegenetzdarstellungen in Karten mit unterschiedlichen Maßstäben ergab sich ein prinzipieller Unterschied zwischen dem Vergröbern beziehungsweise Verfeinern und dem Reduzieren beziehungsweise Expandieren. Mit einer Vergröberung wird das Zusammenfassen mehrerer Elemente aus einer Menge zu einem einzigen Element beschrieben. Eine Verfeinerung beschreibt das Aufteilen eines Elements in mehrere Elemente einer Menge. Eine Reduktion stellt das Entfernen eines Elements aus einer Menge dar. Mit einer Expansion wird ein Element zu einer Menge hinzugefügt. Ist der Elementmenge eine Struktur aufgeprägt, so beschreibt sie einen Graph. Für die Beziehung zwischen den Elementen müssen beim Vergröbern und Verfeinern sowie beim Reduzieren und Expandieren bestimmte Regeln, wie die Strukturverträglichkeit, erfüllt werden. Diese Regeln stellen ein entscheidendes Problem dar, daß bei der nun folgenden Anlayse des Vergöberns und Verfeinerns von Graphen besonders zu beachten ist.

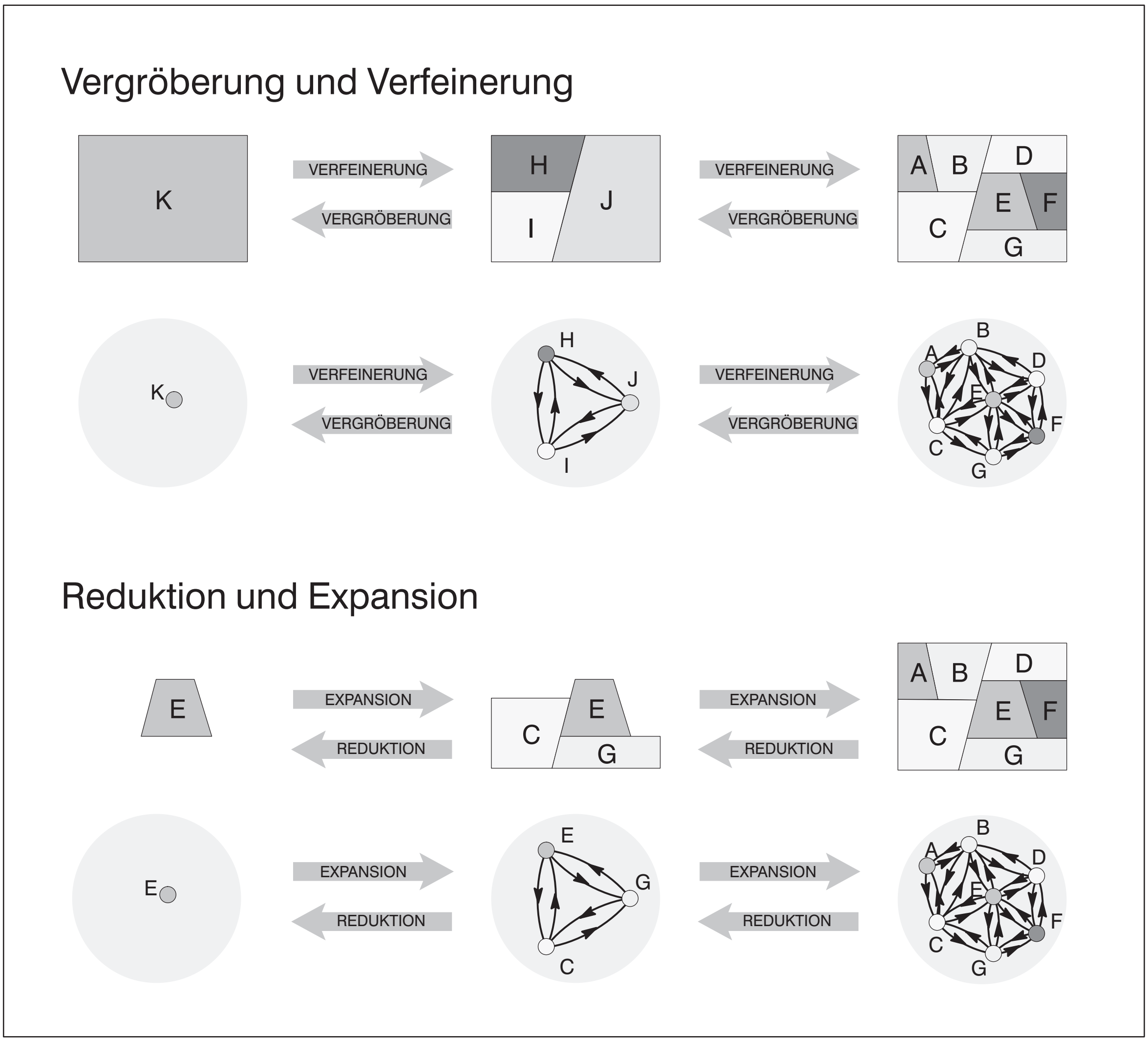


Bild 16: Unterschied zwischen Vergröbern oder Verfeinern und Reduzieren oder Expandieren

Wie sich der prinzipielle Unterschied zwischen dem Vergröbern oder Verfeinern und dem Reduzieren oder Expandieren auswirkt, ist in der Abbildung 16 dargestellt. Sie zeigt eine Flächenaufteilung und eine Flächenerweiterung in drei Stadien, zu denen jeweils eine entsprechender schlichter Graph die Nachbarschaftsbeziehungen der Flächen beschreibt. Bei der Flächenaufteilung wird eine Fläche K in drei kleinere Flächen H, I und J verfeinert. Diese drei Flächen werden in einem zweiten Verfeinerungsschritt nochmals unterteilt, sodaß sieben Flächen entstehen. Die Form und Größe der Gesamtheit aller Flächen in einem Stadium ändert sich nicht. Bei der Flächenerweiterung wird eine kleine Fläche E um zwei weitere Flächen C und G erweitert. Die drei Flächen werden in einem zweiten Expansionsschritt um weitere vier Flächen vergrößert, sodaß das gleiche Ergebnis wie bei der Verfeinerung erreicht wird. Die Form der Gesamtfläche aller kleinen Flächen verändert sich mit jeder Expansion. Auch nimmt die Größe der Gesamtfläche jedesmal zu.

Die zur Flächenaufteilung und zur Flächenerweiterung zugehörige Verfeinerung und Expansion der Graphen scheint auf den ersten Blick identisch zu sein. Sowohl bei der Verfeinerung als auch bei der Expansion nimmt die Anzahl der Knoten zu. Die inzidenten Kanten bilden in jedem Stadium die gleiche größer werdende Struktur sowohl beim Verfeinern als auch beim Expandieren aus. Bei genauerer Betrachtung wird jedoch deutlich, daß bei einem verfeinerten Graph die Knoten, die in mehrere Knoten aufgeteilt wurden (etwa K in H, I und J), verschwinden. Währenddessen sind alle Knoten eines Graphen nach einer Expansion weiterhin im Graph vorhanden (wie etwa beim Übergang von E nach C, E und G).

Der Zusammenhang zwischen maßstäblichen Wegenetzdarstellungen in Karten mit unterschiedlichen Maßstäben entspricht einem Vergröbern und Verfeinern von Flächen. In Abschnitt 4.1 wurde jedoch gezeigt, daß die Graphen zu diesen maßstäblichen Darstellugen wenig geeignet sind, um ein Wegenetz topologisch korrekt zu beschreiben. Die Graphen zu symbolhaften Wegenetzdarstellungen sind dementgegen gut geeignet, um die topologischen und im bipartiten Fall auch die geometrischen Eigenschaften der Wegenetze exakt abzubilden. Der Zusammenhang dieser symbolhaften Wegenetzdarstellungen in Karten mit unterschiedlichen Maßstäben ist allerdings ein Reduzieren und Expandieren.

Dieses Reduzieren und Expandieren einer symbolhaften Wegenetzdarstellung erfordert bei der Beschreibung durch Graphen jedoch nicht nur ein Reduzieren und Expandieren, sondern auch ein Vergröbern und Verfeinern der Graphen. Dies wird anhand der Abbildung 17 erläutert, in der die entsprechenden Graphen zur Reduktion beziehungsweise Expansion der Straßennetzdarstellung aus Abbildung 7 dargestellt sind.

Bei den knotenpunktorientierten Graphen zu den symbolhaften Wegenetzdarstellungen werden bei kleiner werdendem Maßstab neue Knoten für die Verkehrsknotenpunkte hinzugefügt. Alte Knoten im Graphen bleiben erhalten. Der Zusammenhang zwischen den knotenpunktorientierten schlichten Graphen könnte daher als reine Reduktion beziehungsweise Expansion angesehen werden, wenn nicht neben den hinzukommenden Kanten auch Kanten aus dem Graph wieder entfernt würden.

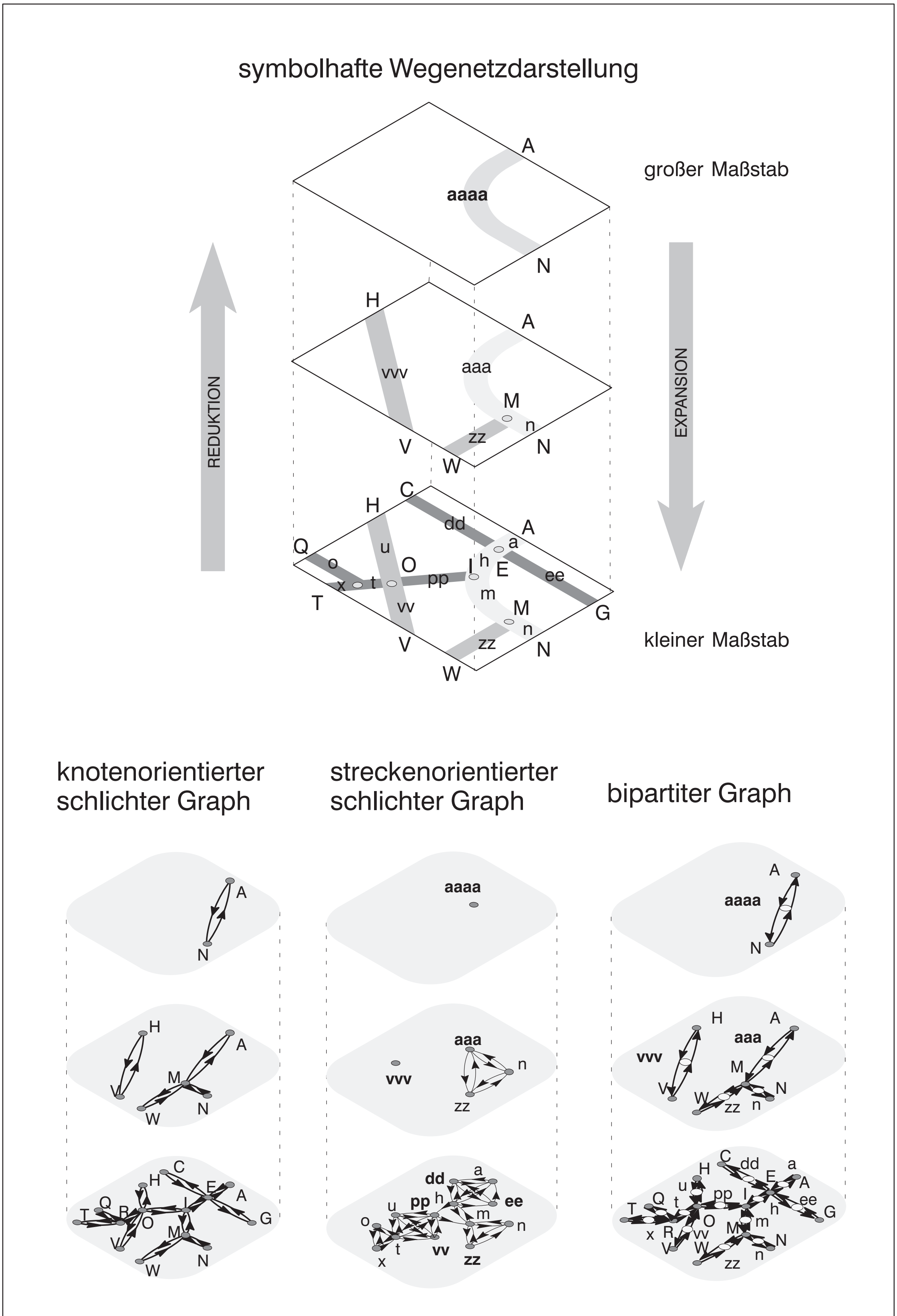


Bild 17: Graphen zur Reduktion und Expansion symbolhafter Wegenetzdarstellungen

Bei den streckenorientierten Graphen zu den symbolhaften Wegenetzdarstellungen werden bei kleiner werdendem Maßstab sowohl Knoten für die Wege verfeinert als auch neue Knoten für die Wege hinzugefügt. Die Kanten werden entsprechend der Verfeinerung der Knoten oder der Expansion zum Graph hinzugefügt.

Die bipartiten Graphen zu den Expansionsstufen der symbolhaften Wegenetzdarstellung vereinigen die Eigenschaften der knotenpunkt− und streckenorientierten schlichten Graphen. Die Knoten, die die Orte (Verkehrsknotenpunkte) abbilden, werden immer nur hinzugefügt und die Knoten, die die Wege abbilden, werden entweder verfeinert oder aber auch neu hinzugefügt.

Der Zusammenhang der Graphen zur symbolhaften Wegenetzdarstellung in Karten mit unterschiedlichen Maßstäben besteht aus einer Kombination von Reduktion beziehungsweise Expansion und Vergröberung beziehungsweise Verfeinerung der Graphen. Von einem größeren zu einem kleineren Maßstab kommen neue Wege hinzu. So entstehen neue Knoten und neue Kanten. Einige neue Wege enden in Wegen, die bereits in der Darstellung vorhanden waren, oder schneiden sie, sodaß zusätzlich neue Verkehrsknotenpunkte entstehen. Der jeweils schon bestehende Weg wird durch diesen neuen Knotenpunkt unterteilt und somit verfeinert. Je nach Graphentyp müssen daher auch bei der Reduktion oder Expansion von symbolhaften Wegenetzdarstellungen neben der typischen Reduktion und Expansion des Graphen entweder Knoten oder Knotenverbindungen verfeinert oder vergröbert werden.

In dem folgenden Abschnitt 5.1 dieses Kapitels werden mehrere Möglichkeiten des Vergröberns und Verfeinerns von Knoten analysiert. In Abschnitt 5.2 wird die Vergröberung oder Verfeinerung von Knotenverbindungen untersucht. Dabei wird auch auf die Kombination der Vergröberung und Verfeinerung von Graphen mit der Reduktion und Expansion von Graphen bezug genommen. Abschließend soll in Abschnitt 5.3 die Bewertung der Verwendbarkeit von schlichten, bipartiten und gerichteten Graphen zur Darstellung von Wegenetzen unter Berücksichtigung des Vergröberns und Verfeinerns zusammengefaßt.

5.1. Vergröbern und Verfeinern von Knoten eines Graphen

Das Vergröbern und Verfeinern von Knoten eines Graphen kann auf viele verschiedene Arten geschehen, die sich durch unterschiedliche Übergänge von einem Graph auf einen gröberen oder feineren Graph ergeben. Diese Übergänge können und sollten als mathematische Abbildungen beschrieben werden.

Eine Abbildung Φ ist eine heterogene binäre Relation, bei der jedem Element einer Menge A (Definitionsmenge) genau ein Element einer Menge B (Zielmenge) zugeordnet wird. Üblicherweise wird die Abbildung Φ als totale und eindeutige oder als linkstotale und rechtseindeutige Relation bezeichnet. (Schreibweise: $\Phi : a \mapsto b$ bzw. $\Phi(a) = b$ mit $a \in A, b \in B$). Zur Relation von Φ existiert eine inverse Relation Φ^T. Diese entspricht der Transponierten von Φ. Ist die Abbildung Φ bijektiv (bitotal und eineindeutig), so ist die inverse Relation Φ^T ebenfalls eine Abbildung.

Die Unterschiede der Übergänge beim Vergröbern beziehungsweise Verfeinern begründen sich darauf, wie und auf welche Elemente die Knoten und Kanten eines Graphen abgebildet werden. Durch diese Abbildungen wird auch die Darstellungsform der vergröberten und verfeinerten Graphen entscheidend geprägt.

Um durch Vergröberung einen Knoten innerhalb eines Graphen zu erhalten, ist eine Abbildung von mehreren Knoten, von einer Knotenmenge oder von einem Graph auf diesen Knoten notwendig. Die Verfeinerung eines Knotens sollte zweckmäßig durch eine zur Abbildung, die beim Vergröbern verwendet wurde, inverse Abbildung erfolgen. Für die Verfeinerung des Knotens als Abbildung auf eine Knotenmenge oder auf einen Graph bestehen theoretisch keine Schwierigkeiten. Ein Problem stellt die Verfeinerung eines Knotens auf mehrere Knoten dar, weil sie nicht eindeutig und somit auch keine Abbildung ist. Diese Verfeinerung entspricht vielmehr einer vortotalen voreindeutigen (oder rechtstotalen linkseindeutigen) Relation. Inwieweit eine solche Relation für eine Verfeinerung sinnvoll und realisierbar ist, wird unter anderem im folgenden untersucht.

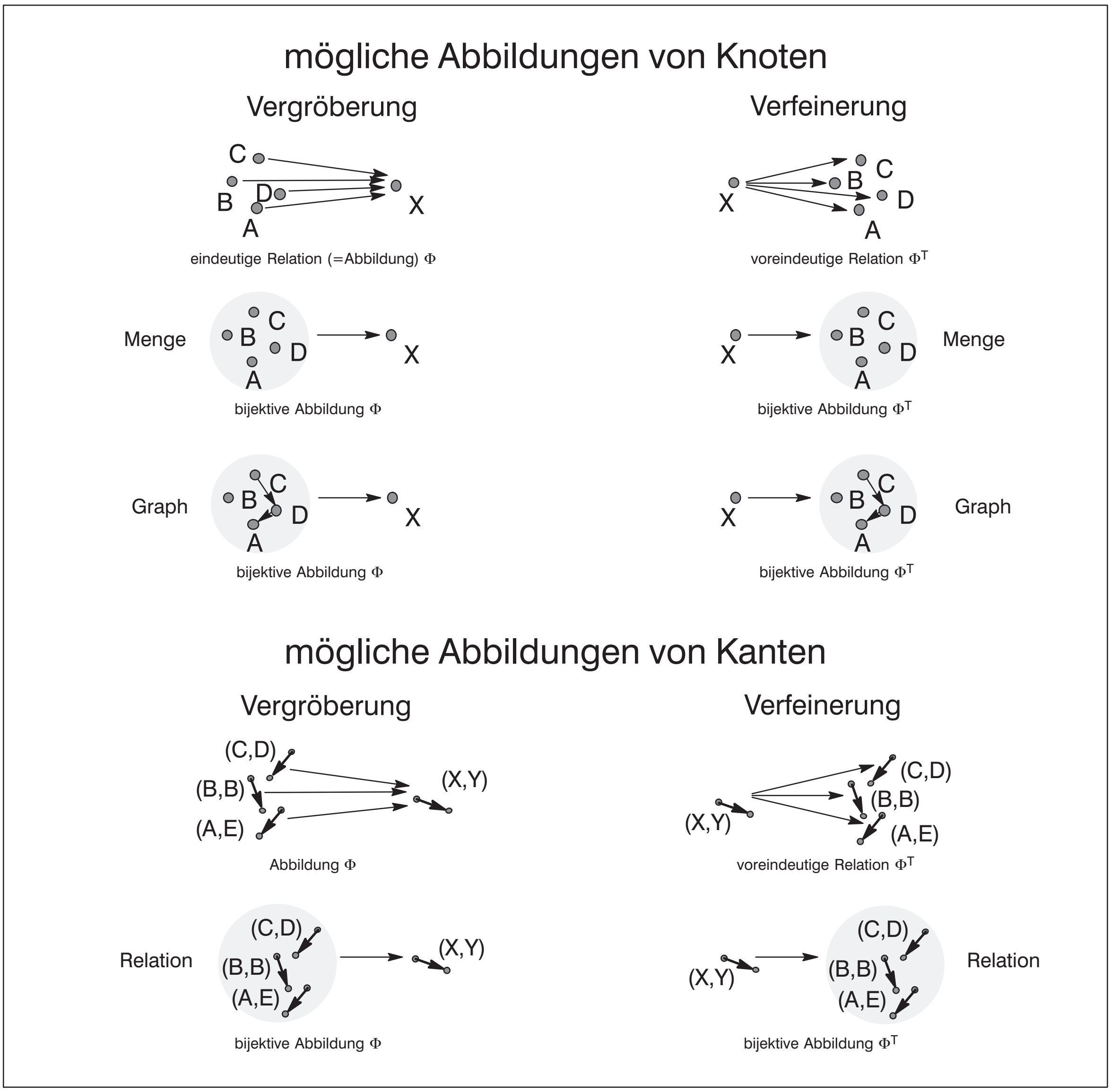


Bild 18: Mögliche Abbildungen zur Vergröberung und Verfeinerung von Knoten und Kanten

Ein Problem, das bei jeder Abbildung von oder auf einen Knoten eines Graphen auftritt, ist die Behandlung der zu diesem Knoten inzidenten Kanten. Die Kanten müssen wie die Knoten durch eine Abbildung auf den vergröberten oder verfeinerten Graph überführt werden. Sinnvolle Abbildungen von Kanten bei der Vergröberung eines Knotens sind Abbildungen von mehreren Kanten oder von einer Relation auf eine Kante. Sinnvolle Übertragungen von Kanten bei der Verfeinerung eines Knotens sind dementsprechend die Abbildung einer Kante auf eine Relation sowie die voreindeutige Relation von einer Kante auf mehrere Kanten.

Abbildungen einer Kante von oder auf einen Knoten, eine Knotenmenge oder einen Graph sind unzweckmäßig und werden hier nicht untersucht, da eine Kante als ein geordnetes Paar keine Eigenschaften wie ein Knoten besitzt, sondern ausschließlich die Zuordnung eines Knoten zu einem anderen beschreibt. Aus diesem Grund ist es auch nicht möglich, eine Kante zu vergröbern oder zu verfeinern (siehe Abschnitt 5.2).

In dem Abschnitt 5.1 werden vier Möglichkeiten der Vergröberung beziehungsweise Verfeinerung analysiert. Die erste Möglichkeit besteht aus einer Abbildung der Knoten eines Graphen auf die Knoten eines anderen und einer Abbildung der inzidenten Kanten auf Kanten. Bei der zweiten Möglichkeit werden Knoten auf Knotenmengen und Kanten auf Relationen bijektiv abgebildet. Die dritte Möglichkeit des Vergröberns und Verfeinerens von Knoten beschreibt eine bijektive Abbildung der Knoten auf Graphen und eine bijektive Abbildung der Kanten auf Relationen. Mit der vierten Möglichkeit wird versucht, die Knoten so auf Graphen abzubilden, daß sich rekursiv definierte hierarchische Graphen ergeben.

Das Vergröbern und Verfeinern von Knoten eines Graphen wird in diesem Abschnitt anhand eines Beispiels untersucht. Das Beispiel ergibt sich aus dem Zusammenfassen der Orte der Flugroutennetzdarstellung in den Abbildungen 10 und 14. Zum Beispiel werden die Orte Düsseldorf und Köln–Bonn zum Gebiet Nordrhein–Westfalen (NRW), der Ort Hannover zum Gebiet Norddeutschland (ND) und die restlichen deutschen Städte zum Gebiet Südostdeutschland (SOD) zusammengefaßt. In einer zweiten

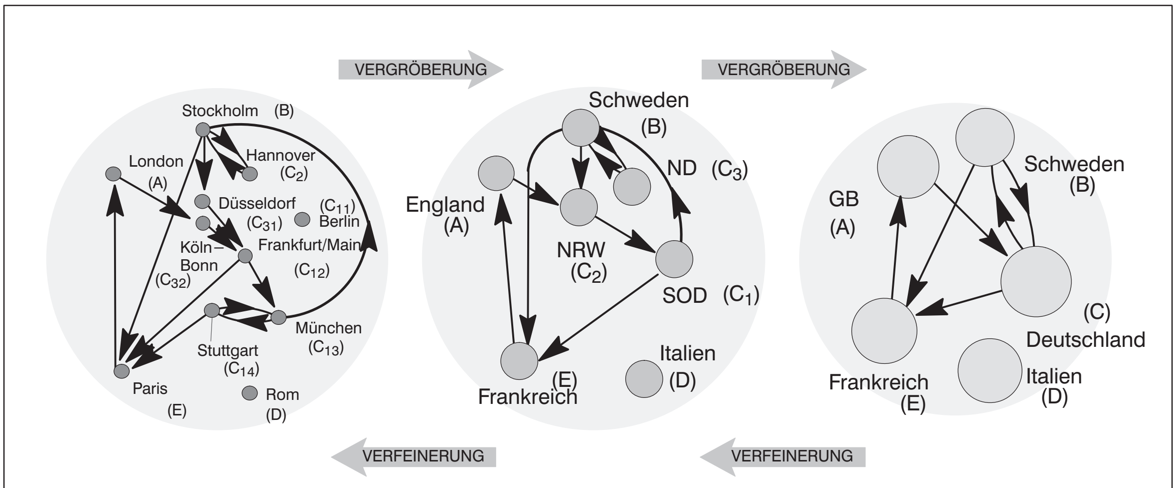


Bild 19: Vergröberung einer Flugroutennetzdarstellung durch Zusammenfassen von Orten

Zusammenfassung werden alle Gebiete eines Landes zu einem Element vereinigt. Auf diese Weise ergeben sich die drei unterschiedlich feinen Netzdarstellungen in Abbildung 19. Zur besseren Übersicht werden die Orts– und Gebietsbezeichnungen durch Buchstaben (in Klammern) ersetzt. Es sei bemerkt, daß diese Zusammenfassungen nicht unbedingt als direkte Vergröberung einer Wegenetzdarstellung aufgefaßt werden sollte, daß sie aber dennoch die Vergröberung und Verfeinerung von Knoten in Graphen sehr gut darstellen können.

5.1.1. Vergröbern und Verfeinern von Knoten durch Abbildungen von Knoten auf Knoten und von Kanten auf Kanten

Entsteht ein Element einer Menge aus der Abbildung mehrerer Elemente einer anderen Menge auf dieses eine Element, so entspricht dies einer lokalen Vergröberung der Menge. Wird die Abbildung auf alle Elemente einer Menge angewendet, sodaß jedes Element genau einmal mit anderen Elementen dieser Menge zu einem Element der vergröberten Menge zusammengefaßt wird, so ist dies eine globale Vergröberung. Eine Menge entspricht einem leeren schlichten Graph. Die Abbildung von mehreren Knoten eines leeren schlichten Graphen auf einen Knoten eines anderen leeren schlichten Graphen ist daher bereits eine Vergröberung eines schlichten Graphen. Die bei der Vergröberung erzeugten Knoten dürfen bis auf den Fall, wo ein Knoten nur auf sich selbst abgebildet wird, zu keinem Knoten im feinen Graph identisch sein.

Ist ein schlichter Graph nicht leer, so entspricht dies der Aufprägung einer Struktur auf eine Menge. Bei der Vergröberung des schlichten Graphen beziehungsweise der strukturierten Menge muß die Struktur, ebenso wie die Knoten beziehungsweise Elemente, sinnvoll abgebildet werden. Da die Anzahl der Kanten, die die aufgeprägte Struktur beschreiben, bei der Vergröberung von Knoten nicht größer werden kann, bietet sich für die Kanten die gleiche Abbildung wie für die Knoten an. Es werden also mehrere Kanten auf eine Kante abgebildet.

Für das Vergröbern der Knoten eines bipartiten Graphen mit ihren inzidenten Kanten gibt es im Prinzip keinen Unterschied zum Vergröbern von Knoten eines schlichten Graphen. Eine Forderung, die für bipartite Graphen generell gilt und daher auch beim Vergröbern un Verfeinern ihrer Knoten beachtet werden muß, ist die Regel, daß die adjazenten Knoten zu einem Knoten eines bipartiten Graphen grundsätzlich aus der jeweils anderen Knotenmenge stammen müssen.

In einem allgemeinen bipartiten Graph beeinflußt das Vergröbern und Verfeinern eines Knotens v aus der Menge V_1 nur die inzidenten Kanten, nicht aber die Nachbarknoten aus der Menge V_2. Dementgegen müssen die Pfeile eines gerichteten Graphen bei der Vergröberung oder Verfeinerung eines Knotens notfalls vergröbert oder verfeinert werden. Dies folgt aus der Zusatzanforderung der gerichteten Graphen an bipartite Graphen, daß jeder Pfeil höchstens in einer Ausgangs– und höchstens in einer Eingangsinzidenz auftreten darf. Das Vergröbern eines Knotens mit mehreren inzidenten Kanten führt so zwangsläufig zu einem Vergröbern der Pfeile.

Eine Regel, die beim Vergröbern aller Graphen eingehalten werden muß, ist die Forderung nach der Strukturverträglichkeit. Die Beziehung, die zwischen den Knoten eines feinen Graphen bestehen, müssen nach der Vergröberung zwischen den Knoten des groben Graphen weiterhin vorhanden sein. Die Einhaltung der Strukturverträglichkeit garantiert, daß alle inzidenten Kanten der zu vergröbernden oder zu verfeinernden Knoten nach dem Vergröbern oder Verfeinern korrekt auf alle inzidenten Kanten der daraus entstandenen groben oder feinen Knoten abgebildet werden.

Definition: Sind $G = (V; E)$ und $G' = (V'; E')$ zwei schlichte Graphen, so heißt die Relation Φ ein Homomorphismus von G nach G', wenn Φ eine Abbildung von V nach V' mit $E \subset \Phi E' \Phi^T$ ist. Φ bildet G strukturverträglich auf G' ab.

Definition: Sind $G = (V_1, V_2; R_{12,} R_{21})$ und $G' = (V_1', V_2'; R_{12}', R_{21}')$ zwei bipartite Graphen, so heißen die Relationen Φ_1 und Φ_2 ein Homomorphismus von G nach G', wenn Φ_1 eine Abbildung von V_1 nach V_1' und Φ_2 eine Abbildung von V_2 nach V_2' mit $R_{12} \subset \Phi_1 R_{12}' \Phi_2^T$ und $R_{21} \subset \Phi_2 R_{21}' \Phi_1^T$ ist. Φ_1 und Φ_2 bilden G strukturverträglich auf G' ab.

Das heißt, die Nachbarknoten zu einem Knoten u in einem feinen Graph müssen nach der Vergröberung zu dem Knoten uu im groben Graph wieder Nachbarknoten sein, zu dessen Zusammenfassung unter anderen auch der Knoten u gehört. Für bipartite Graphen sind die Nachbarknoten zu einem Knoten der Menge V_1 (oder V_2) jeweils in der anderen Knotenmenge V_2 (oder V_1) enthalten.

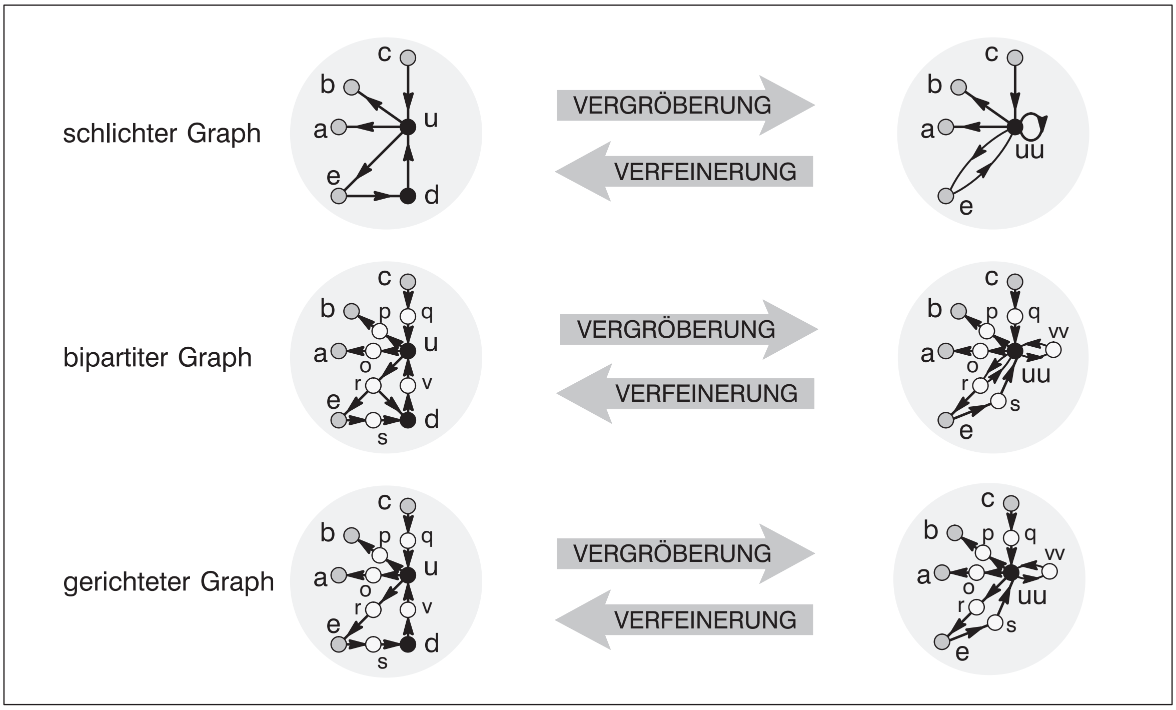


Bild 20: Vergröberung und Verfeinerung von Knoten eines Graphen durch Abbildung von Knoten auf Knoten und von Kanten auf Kanten

Für die Kanten, die im feinen schlichten Graph jeweils zwei Knoten miteinander in Beziehung gesetzt haben, und die bei der Vergröberung auf den gleichen Knoten *uu* abgebildet wurden, ergibt sich im groben schlichten Graph zwangsläufig eine Schlinge *(uu,uu)*. Die Kanten, die auf diese Schlinge abgebildet werden, stellen die "innere Struktur" des Knotens *uu* dar. In einem bipartiten Graph existieren keine Schlingen. Es ist zweckmäßig, wenn auch nicht notwendig, die Knoten der Menge V_2, die ausschließlich Knoten der Menge V_1, die im groben Graph zum Knoten *uu* vergröbert werden, als Nachbarknoten haben, zusammen mit ihren inzidenten Kanten als innere Struktur von *uu* aufzufassen. Es ist weiterhin zweckmäßig, diese innere Struktur eines Knotens in einem bipartiten Graph auf einen einzigen Knoten *vv* zu vergröbern. In einem gerichteten Graph entspricht der Knoten *vv* einem Pfeil.

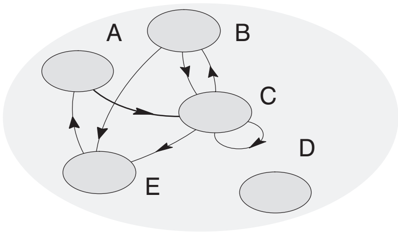
Die Verfeinerung eines Graphen sollte durch eine zur Vergröberung inverse Abbildung erfolgen. Da die in diesem Abschnitt 5.1.1 vorgestellte Abbildung zur Vergröberung zwar eindeutig aber nicht eineindeutig oder bijektiv ist, existiert keine inverse Abbildung zur Verfeinerung, sondern nur eine inverse voreindeutige Relation, die sowohl einen Knoten auf mehrere Knoten als auch eine Kante auf mehrere Kanten überträgt.

Ob und wie eine solche voreindeutige Relation in einem Graphensystem zur systematischen Vergröberung und Verfeinerung von Graphen realisiert werden kann, bleibt zu untersuchen. Eine Abbildung ist in jedem Fall realisierbar und sollte immer gegenüber einer nicht eindeutigen Relation bevorzugt werden. Daraus ergibt sich beim Vergröbern und Verfeinern von Graphen die Forderung nach möglichst bijektiven Abbildungen, in der jeder Knoten eines Graphen auf genau einen Knoten eines anderen Graphen abgebildet wird und in der jedem Knoten auch genau ein Knoten zugeordnet wird. Solche bijektiven Abbildungen werden in den folgenden drei Vergröberungs− und Verfeinerungsmöglichkeiten für Graphen untersucht.

Die Darstellungsformen der Graphen, die sich bei der Vergröberung und Verfeinerung durch Abbildungen von Knoten auf Knoten und von Kanten auf Kanten ergeben, lassen sich gut anhand des Beispiels der Vergröberung und Verfeinerung der Graphen zur Flugroutennetzdarstellung in den Abbildungen 21 bis 23 erkennen. Zunächst werden die Darstellungsformen der schlichten und dann die der bipartiten Graphen erläutert.

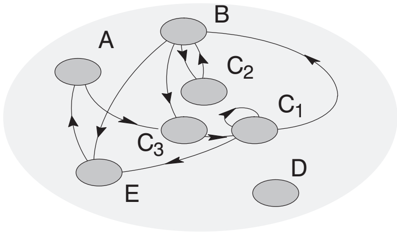
Schlichte Graphen

Der Vorgang, der vom groben Graphen G_1 mit den fünf Knoten A, B, C, D und E für die Länder Großbritanien, Schweden, Deutschland, Italien und Frankreich das Erreichen des feinsten Graphen mit den Flughafen−Städten ermöglicht, entspricht einer Verfeinerung schlichter Graphen. Hierbei wird zunächst der Knoten C in die drei Knoten C_1, C_2 und C_3 aufgeteilt, dann der Knoten C_1 in die vier Knoten C_{11}, C_{12}, C_{13} und C_{14} verfeinert und schließlich der Knoten C_3 in die Knoten C_{31} und C_{32} unterteilt. Die übrigen Knoten werden auf jeweils einen Knoten des nächstfeineren Graphen abgebildet (siehe Abbildung 21).



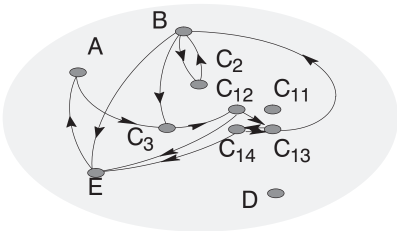
$G_1 = (V_1; E_1)$

$V_1 = \{$ A, B, C, D, E $\}$
$E_1 = \{$ (A,C), (B,C), (B,E), (C,B), (C,C), (C,E), (E,A) $\}$



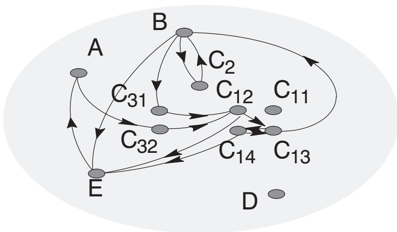
$G_2 = (V_2; E_2)$

$V_2 = \{$ A, B, C_1, C_2, C_3, D, E $\}$
$E_2 = \{$ (A,C_3), (B,C_2), (B,C_3), (B,E), (C_1,B), (C_2,B), (C_1,C_1), (C_3,C_1), (C_1,E), (E,A) $\}$



$G_3 = (V_3; E_3)$

$V_3 = \{$ A, B, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_2, C_3, D, E $\}$
$E_3 = \{$ (A,C_3), (B,C_2), (B,C_3), (B,E), (C_{13},B), (C_2,B), (C_{12},C_{13}), (C_{13},C_{14}), (C_{14},C_{13}), (C_3,C_{12}), (C_{12},E), (C_{14},E), (E,A) $\}$



$G_4 = (V_4; E_4)$

$V_4 = \{$ A, B, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_2, C_3, D, E $\}$
$E_4 = \{$ (A,C_{32}), (B,C_2), (B,C_{31}), (B,E), (C_{13},B), (C_2,B), (C_{12},C_{13}), (C_{13},C_{14}), (C_{14},C_{13}), (C_{31},C_{12}), (C_{32},C_{12}), (C_{12},E), (C_{14},E), (E,A) $\}$

Bild 21: Vergröbern und Verfeinern schlichter Graphen mit Abbildungen von Knoten auf Knoten und von Kanten auf Kanten

An den Knoten C im gröbsten schlichten Graph G_1 und den Knoten C_1 im schlichten Graph G_2 muß jeweils eine Schlinge eingefügt werden, da sich bei ihrer Verfeinerung eine Beziehung zwischen den verfeinerten Knoten C_3 und C_1 in G_2 beziehungsweise C_{12}, C_{13} und C_{14} in G_3 ergeben hat.Die Schlingen werden bei der Verfeinerung auf diese inneren Strukturen der Knoten C und C_1 überführt.

Die Vergröberungen und Verfeinerungen aller vier schlichten Graphen G_1, G_2, G_3 und G_4 führen durch Abbildung der Knoten auf Knoten und der Kanten auf Kanten wieder zu schlichten Graphen. Der Vorgang des Verfeinerns und Vergröberns kann anhand dieser Graphen weder in einer hierarchisch geschachtelten noch sonst irgendeiner Form erkannt werden, sodaß etwa eine Rückführung des vergröberten oder verfeinerten Graphen auf seinen Ausgangsgraph ohne ”festgehaltene” Zusatzinformationen über die verwendete Abbildungsvorschrift nicht möglich ist (So ist beispielsweise die Abbildung von C_1, C_2 und E in G_2 auf C in G_1 sowie von C_3 in G_2 auf E in G_1 zwar denkbar, sie ist jedoch keine Rückführung der beschriebenen Verfeinerung von G_1 nach G_2).

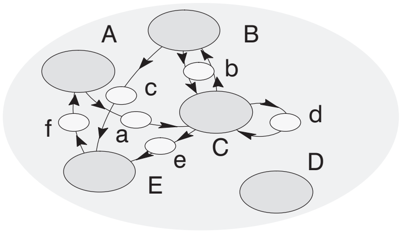
Bipartite Graphen

Die Verfeinerung der bipartiten Graphen zur Flugroutennetzdarstellung unterscheidet sich nur wenig von der Verfeinerung der schlichten Graphen (siehe Abbildung 22). Die Knoten des groben schlichten Graphen werden im groben bipartiten Graphen durch die Knoten der erste Menge V_1 dargestellt. Die Knotenverbindungen, die im groben schlichten Graph als Kanten beschrieben werden, bestehen im groben bipartiten Graph aus Knoten der zweiten Menge V_2 mit den entsprechenden Inzidenzkanten.

So existiert zum Beispiel im bipartiten Graph für die Verbindung zwischen den Knoten B und C ein Knoten b mit vier inzidenten Kanten anstatt der Kante *(B,C)* und *(C,B)* im schlichten Graph. Die Schlingen an den Knoten C und C_1 in den schlichten Graphen G_1 und G_2 entsprechen den Knoten d beziehungsweise d_1 mit den inzidenten Kanten (C, d) und (d, C) beziehungsweise (C_1, d_1) und (d_1, C_1). Die Vergröberung und Verfeinerung von Knoten oder Pfeilen zur Darstellung der Verbindungen zu den Knoten der jeweils ersten Menge im bipartiten Graphen wird im Abschnitt 5.2 erläutert.

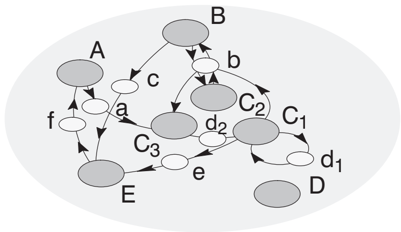
Bei der Verfeinerung der Knoten C, C_1 und C_3 werden die Knoten der Mengen V_{12} und V_{22} der bipartiten Graphen ebensowenig verändert wie die übrigen Knoten der Mengen V_{11} und V_{21}. Lediglich die inzidenten Kanten zu den Knoten C, C_1 und C_3 werden entsprechend der Strukturverträglichkeit verändert. Nach der Verfeinerung ist eine direkte Identifikation der Knoten aus V_{22} im bipartiten Graph mit den Kanten im schlichten Graph, die die gleiche Knotenverbindung beschreiben sollen, nicht mehr möglich. So wird beispielsweise die Verbindung vom Knoten C_1 zum Knoten B im schlichten Graph G_2 über die Kante (C_1, B) realisiert, während sie im bipartiten Graph G_2 über denselben Knoten b geführt wird, wie die Verbindungen von C_2 nach B und von B nach C_2. Auch bleiben die Knoten d_1 und d_2 für die Darstellung der inneren Struktur im gröberen Knoten beim Übergang zum verfeinerten bipartiten Graph als ein Knoten bestehen.

Existiert der Wunsch, nur die Verbindung eines Knoten aus einer der beiden Mengen V_1 eines bipartiten Graphen zu einem anderen Knoten derselben Menge V_1 über einen Knoten der anderen Menge V_2 beschreiben zu wollen, so müssen die Knoten aus V_2 ohne innere Struktur verfeinert werden. Durch die Zusatzanforderung an bipartite Graphen, nur eine Ausgangs– und nur eine Eingangsinzidenzkante zuzulassen, wird diese Verfeinerung der ”Verbindungsknoten” (der Pfeile) in gerichteten Graphen grundsätzlich immer durchgeführt. So ist zu jedem Zeitpunkt (auch nach einer Vergröberung oder Verfeinerung) eine Übertragung von Pfeilen mit den inzidenten Inzidenzkanten in einem gerichten Graph auf die Kanten eines schlichten Graphen möglich.



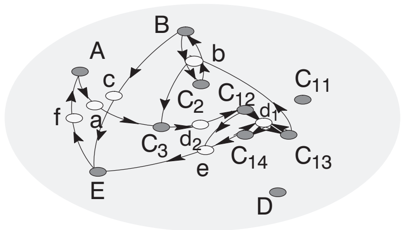
$G_1 = (V_{11}, V_{12}; R_{112}, R_{121})$

$V_{11} = \{A, B, C, D, E\}$
$V_{12} = \{a, b, c, d, e, f\}$
$R_{112} = \{(A,a), (B,b), (B,c), (C,b), (C,d), (C,e), (E,f)\}$
$R_{121} = \{(a,C), (b,B), (b,C), (c,E), (d,C), (e,E), (f,A)\}$



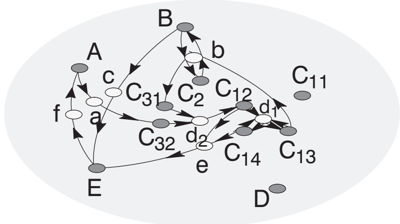
$G_2 = (V_{21}, V_{22}; R_{212}, R_{221})$

$V_{21} = \{A, B, C_1, C_2, C_3, D, E\}$
$V_{22} = \{a, b, c, d_1, d_2, e, f\}$
$R_{212} = \{(A,a), (B,b), (B,c), (C_1,b), (C_1,d_1), (C_1,e), (C_2,b), (C_3,d_2), (E,f)\}$
$R_{221} = \{(a,C_3), (b,B), (b,C_2), (b,C_3), (c,E), (d_1,C), (d_2,C_1), (e,E), (f,A)\}$



$G_3 = (V_{31}, V_{32}; R_{312}, R_{321})$

$V_{31} = \{A, B, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_2, C_3, D, E\}$
$V_{32} = \{a, b, c, d_1, d_2, e, f\}$
$R_{312} = \{(A,a), (B,b), (B,c), (C_{12},d_1), (C_{12},e), (C_{13},b), (C_{13},d_1), (C_{14},d_1), (C_{14},e), (C_2,b), (C_3,d_2), (E,f)\}$
$R_{321} = \{(a,C_3), (b,B), (b,C_2), (b,C_3), (c,E), (d_1,C), (d_2,C_1), (e,E), (f,A)\}$



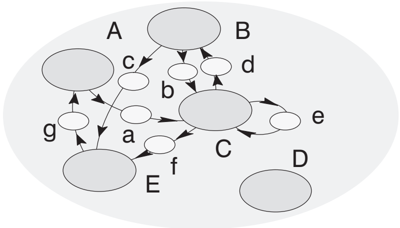
$G_4 = (V_{41}, V_{42}; R_{412}, R_{421})$

$V_{41} = \{A, B, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_2, C_{31}, C_{32}, D, E\}$
$V_{42} = \{a, b, c, d_1, d_2, e, f\}$
$R_{412} = \{(A,a), (B,b), (B,c), (C_{12},d_1), (C_{12},e), (C_{13},b), (C_{13},d_1), (C_{14},d_1), (C_{14},e), (C_2,b), (C_{31},d_2), (C_{31},d_2), (E,f)\}$
$R_{421} = \{(a,C_{32}), (b,B), (b,C_2), (b,C_{32}), (c,E), (d_1,C), (d_2,C_1), (e,E), (f,A)\}$

Bild 22: Vergröbern und Verfeinern bipartiter Graphen mit Abbildungen von Knoten auf Knoten und von Kanten auf Kanten

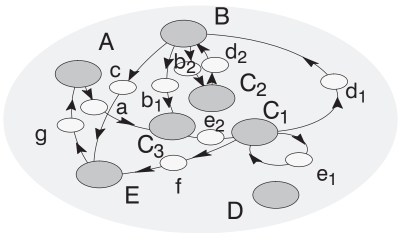
Die Darstellungsform, die beim Vergröbern oder Verfeinern eines bipartiten Graphen durch Abbildung der Knoten auf Knoten und der Kanten auf Kanten erreicht wird, ist wieder ein bipartiter Graph. Auch hierbei ist wie bei schlichten Graphen der Vorgang des Vergröberns und Verfeinerns aus der alleinigen Betrachtung der Graphen nicht zu erkennen. Für Rückführungen von Vergröberungen und Verfeinerungen oder ähnlichem sind zusätzliche Informationen zu den verwendeten Abbildungen unumgänglich.

Ob das Manko der zusätzlichen Abbildungsinformationen und das Fehlen jeglicher hierarchischer Informationen zu den zwangsläufig entstehenden Verfeinerungsstufen vermieden werden kann, soll sich bei der Untersuchung der weiteren Möglichkeiten zum Vergröbern und Verfeinern in den folgenden drei Abschnitten herausstellen. Diese drei Möglichkeiten bieten in jedem Fall ausschließlich bijektive Abbildungen zum Vergröbern und Verfeinern von Graphen an und bauen mehr oder weniger umfangreich eine in den Graphen implizite Verfeinerungshierarchie auf.



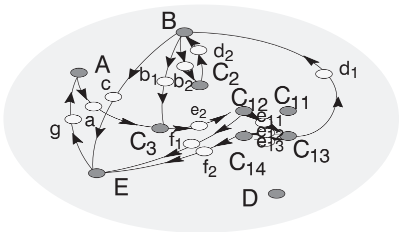
$G_1=(V_1,A_1;\ R_{1VA},R_{1AV})$

$V_1=\{A, B, C, D, E\}$
$A_1=\{a, b, c, d, e, f, g\}$
$R_{1VA}=\{(A,a), (B,b), (B,c), (C,d), (C,e), (C,f), (E,g)\}$
$R_{1AV}=\{(a,C), (b,C), (c,E), (d,B), (e,C), (f,E), (g,A)\}$



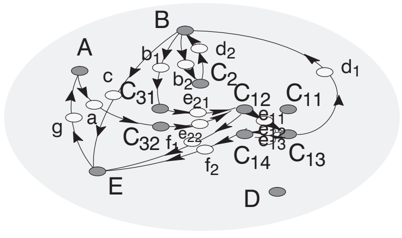
$G_2=(V_2, A_2;\ R_{2VA},R_{2AV})$

$V_2=\{A, B, C_1, C_2, C_3, D, E\}$
$A_2=\{a, b_1, b_2, c, d_1, d_2, e_1, e_2, f, g\}$
$R_{2VA}=\{(A,a), (B,b_1), (B,b_2), (B,c), (C_1,d_1), (C_2,d_2), (C_1,e_1), (C_3,e_2), (C_1,f), (E,g)\}$
$R_{2AV}=\{(a,C_3), (b_1,C_3), (b_2,C_2), (c,E), (d_1,B), (d_2,B), (e_1,C_1), (e_2,C_1), (f,E), (g,A)\}$



$G_3=(V_3,A_3;\ R_{3VA},R_{3AV})$

$V_3=\{A, B, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_2, C_3, D, E\}$
$A_3=\{a, b_1, b_2, c, d_1, d_2, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_2, f_1, f_2, g\}$
$R_{3VA}=\{(A,a), (B,b_1), (B,b_2), (B,c), (C_{12},e_{11}), (C_{12},f_1), (C_{13},d_1), (C_{13},e_{12}), (C_{14},e_{13}), (C_{14},f_2), (C_2,d_2), (C_3,e_2), (E,g)\}$
$R_{3AV}=\{(a,C_3), (b_1,C_3), (b_2,C_2), (c,E), (d_1,B), (d_2,B), (e_{11},C_{13}), (e_{12},C_{14}), (e_{13},C_{13}), (e_2,C_{12}), (f_1,E), (f_2,E), (g,A)\}$



$G_4=(V_4,A_4;\ R_{4VA},R_{4AV})$

$V_4=\{A, B, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_2, C_{31}, C_{32}, D, E\}$
$A_4=\{a, b_1, b_2, c, d_1, d_2, e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}, f_1, f_2, g\}$
$R_{4VA}=\{(A,a), (B,b_1), (B,b_2), (B,c), (C_{12},e_{11}), (C_{12},f_1), (C_{13},d_1), (C_{13},e_{12}), (C_{14},e_{13}), (C_{14},f_2), (C_2,d_2), (C_{31},e_{21}), (C_{32},e_{22}), (E,g)\}$
$R_{4AV}=\{(a,C_3), (b_1,C_3), (b_2,C_2), (c,E), (d_1,B), (d_2,B), (e_{11},C_{13}), (e_{12},C_{14}), (e_{13},C_{13}), (e_{21},C_{12}), (e_{22},C_{12}), (f_1,E), (f_2,E), (g,A)\}$

Bild 23: Vergröbern und Verfeinern gerichteter Graphen mit Abbildungen von Knoten auf Knoten und von Kanten auf Kanten

5.1.2. Vergröbern und Verfeinern von Knoten durch bijektive Abbildungen von Knoten auf Mengen und von Kanten auf Relationen

Eine Möglichkeit, die Vergröberung und Verfeinerung eines Graphen mit bijektiven Abbildungen durchzuführen, bietet die Abbildung von einer nicht leeren Knotenmenge auf einen Knoten als eine Vergröberung und die Abbildung eines Knotens auf eine nicht leere Knotenmenge als als eine Verfeinerung des Graphen. Um für die Struktur des Graphen ebenfalls bijektive Abbildungen verwenden zu können, wird zur Vergröberung einer Kante die Abbildung von einer Relation auf eine Kante und zur Verfeinerung einer Kante die Abbildung von einer Kante auf eine Relation verwendet. Wie bei jeder Abbildung zur Vergröberung und Verfeinerung eines Graphen dürfen auch hier, bis auf die Abbildung eines Knoten auf sich selbst, keine Knoten im groben und feinen Graph identisch sein.

Eine Regel, die in jedem Fall eingehalten werden muß, ist die, daß die verwendeten Mengen und Relationen infolge der Vergröberung und Verfeinerung eines Graphen niemals leer sein dürfen. Das heißt, es muß mindestens ein Knoten in einer solchen Menge und mindestens eine Kante in einer solchen Relation enthalten sein.

Bei der Verfeinerung eines Knotens uu in einem schlichten Graph wird der Knoten uu auf eine Knotenmenge U mit mindestens einem Knoten abgebildet. Die inzidenten Kanten zum zu verfeinernden Knoten uu werden auf jeweils eine nicht leere Relation abgebildet. Das erste Element einer Kante aus dieser Relation ist entweder ein Knoten aus der Menge U oder ein Knoten, zu dem der Knoten uu adjazent ist. Das zweite Element dieser Kante ist dementsprechend entweder ein adjazenter Knoten zu uu oder ein Knoten der Menge U. Um die Strukturverträglichkeit komplett zu gewährleisten, muß auch bei dieser bijektiven Abbildungsmöglichkeit für schlichte Graphen gegebenfalls die innere Struktur der Verfeinerung von uu durch eine Schlinge (uu,uu) im gröberen Graph eingeführt werden. Die innere Struktur kann dann von der Schlinge (uu,uu) auf eine nichtleere Relation $R_U \subseteq U \times U$ abgebildet werden. Zur Vergröberung einer Knotenmenge U in einem schlichten Graph sind lediglich die zur Verfeinerung inversen Abbildungen anzuwenden (siehe Abbildung 24).

Wie beim Vergröbern und Verfeinern von bipartiten Graphen mit den in Abschnitt 5.1.1 vorgestellten Abbildungen ergibt sich auch bei der hier vorgestellten Möglichkeit bijektiver Abbildungen von bipartiten Graphen keinen wesentlichen Unterschied zum Vergröbern und Verfeinern von schlichten Graphen.

Die Nachbarknoten eines zu vergröbernden oder zu verfeinernden Knotens in einem bipartiten Graph müssen in der jeweils anderen Menge des Graphen enthalten sein, werden jedoch vom Vergröbern beziehungsweise Verfeinern nicht beeinflußt. Nur die inzidenten Kanten des zu vergröbernden oder zu verfeinerenden Knotens müssen gemäß der Strukturverträglichkeit auf entsprechende Relationen abgebildet werden. Eine Schlinge zu einem Knoten u aus V_1 eines schlichten Graphen wird auch hier im bipartiten Graph durch einen "Verbindungsknoten" v aus V_2 mit einer Ausgangs− und Eingangsinzidenz ((v,u) und (u,v)) zum Knoten u ersetzt.

Die Einhaltung der Zusatzanforderung, die bipartite als gerichtete Graphen auszeichnet, garantiert auch bei der Abbildung der Knoten eines gerichteten Graphen auf Mengen und der Kanten dieses Graphen auf Relationen, daß die Pfeile gegebenenfalls ohne innere Struktur verfeinert werden. In diesem Fall ist eine direkte Überführung in einen schlichten Graphen möglich. Dies entspricht einer Mengenbildung aus mehreren Pfeilen und der Abbildung aller inzidenten Kanten zu den Pfeilen auf jeweils eine Relation.

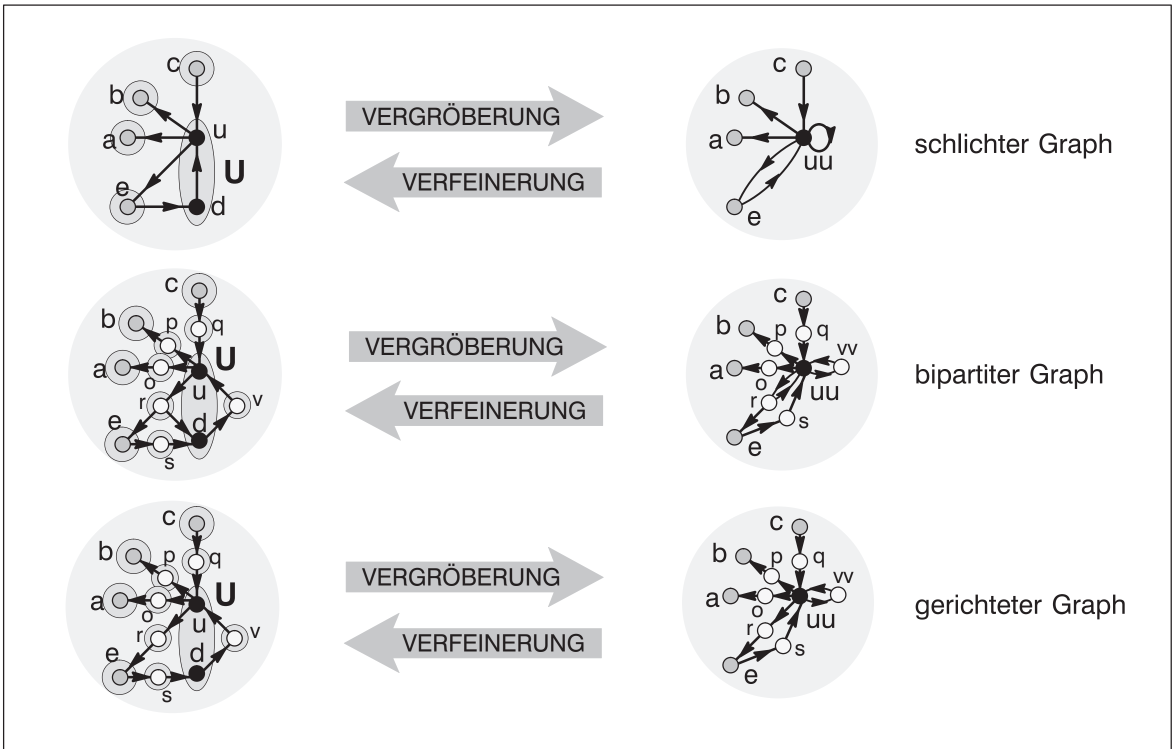
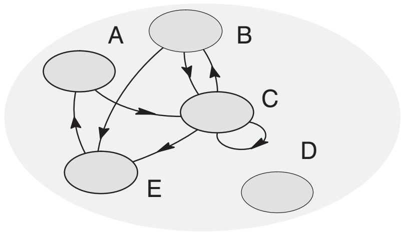


Bild 24: Vergröberung und Verfeinerung von Knoten eines Graphen durch eine bijektive Abbildung von Knoten auf Mengen und von Kanten auf Relationen

Die Darstellungsformen, die sich durch die Verfeinerung des gröbsten Graphen mit Hilfe der bijektiven Abbildungen von Knoten zu Knotenmengen und von Kanten zu Relationen entstehen, werden anhand des bekannten Beispiels der Flugroutennetzes in Abbildung 25 erläutert. Das Vergröbern und Verfeinern mit den bijektiven Abbildungen führt zu keinen wesentlich neuen Unterschieden zwischen schlichten, bipartiten und gerichteten Graphen, als sie schon im Abschnitt 5.1.1 beschrieben worden sind. Daher werden hier die Darstellungsformen nur anhand schlichter Graphen erläutert.

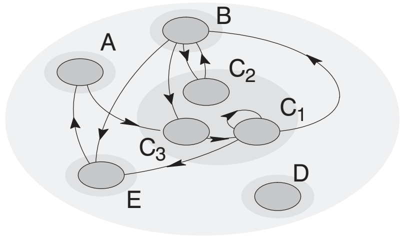
Bei Betrachtung der Abbildung 25 entsteht der Eindruck, daß die Verfeinerung des Knotens C im groben schlichten Graph $G_1 = (V_1, E_1)$, die durch die Abbildung der Knoten auf jeweils eine Knotenmenge (zum Beispiel $C \mapsto \{C_1, C_2, C_3\}$) und duch die Abbildung der Kanten auf jeweils eine Relation (zum Beispiel $(B,C) \mapsto \{(B,C_1),(B,C_3)\}$) zu einem schlichten Graph $G_2 = (V_2, E_2)$ führt, dessen Knoten Mengen sind.

Der Eindruck ist falsch, denn G_2 ist kein schlichter Graph. Zwar ist die Menge V_2 eine Menge von Mengen, doch E_2 ist ist keine Relation auf V_2 ($E_2 \not\subseteq V_2 \times V_2$). E_2 ist vielmehr eine Menge von Relationen auf der Vereinigung aller Elemente der Menge V_2.



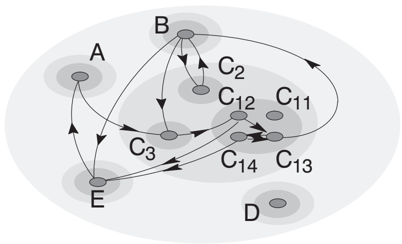
$G_1 = (V_1; E_1)$

$V_1 = \{ A, B, C, D, E \}$
$E_1 = \{ (A,C), (B,C), (B,E), (C,B), (C,C), (C,E), (E,A) \}$



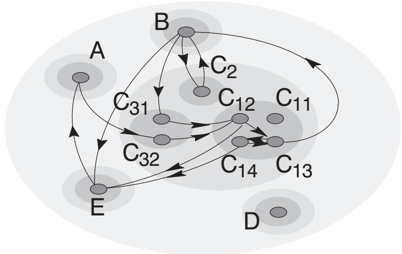
$G_2 = (V_2; E_2)$

$V_2 = \{ \{A\}, \{B\}, \{C_1, C_2, C_3\}, \{D\}, \{E\} \}$
$E_2 = \{ \{(A,C_3)\}, \{(B,C_2),(B,C_3)\}, \{(B,E)\}, \{(C_1,B),(C_2,B)\},$
$\{(C_1,C_1),(C_3,C_1)\}, \{(C_1,E)\}, \{(E,A)\} \}$



$G_3 = (V_3; E_3)$

$V_3 = \{ \{\{A\}\}, \{\{B\}\}, \{\{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}\}, \{C_2\}, \{C_3\}\},$
$\{\{D\}\}, \{\{E\}\} \}$
$E_3 = \{ \{\{(A,C_3)\}\}, \{\{(B,C_2)\}, \{(B,C_3)\}\}, \{\{(B,E)\}\},$
$\{\{(C_{12},B),(C_{13},B)\}, \{(C_2,B)\}\},$
$\{\{(C_{12},C_{13}),(C_{13},C_{14}),(C_{14},C_{13})\}, \{(C_3,C_{12})\}\},$
$\{\{(C_{12},E),(C_{14},E)\}\}, \{\{(E,A)\}\} \}$



$G_4 = (V_4; E_4)$

$V_4 = \{ \{\{A\}\}, \{\{B\}\}, \{\{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}\}, \{C_2\},$
$\{C_{31}, C_{32}\}\}, \{\{D\}\}, \{\{E\}\} \}$
$E_4 = \{ \{\{(A,C_{32})\}\}, \{\{(B,C_2)\}, \{(B,C_{31})\}\}, \{\{(B,E)\}\},$
$\{\{(C_{12},B),(C_{13},B)\}, \{(C_2,B)\}\},$
$\{\{(C_{12},C_{13}),(C_{13},C_{14}),(C_{14},C_{13})\},$
$\{(C_{31},C_{12}),(C_{32},C_{12})\}\},$
$\{\{(C_{12},E),(C_{14},E)\}\}, \{\{(E,A)\}\} \}$

Bild 25: Vergröbern und Verfeinern schlichter Graphen mit Abbildungen von Knoten auf Mengen und von Kanten auf Relationen

Diese, für den Formalismus unangenehme Eigenschaft von G_2, wird durch die Darstellungsmöglichkeiten, die G_2 bieten kann, relativiert. Ein schlichter Graph mit Mengen als Knoten kann nur die Beziehung zwischen den Mengen beschreiben. Da die Mengen aus den Knoten von G_1 bijektiv abgebildet wurden, beschreibt bereits E_1 diese Beziehung (Eine Verfeinerung auf einen solchen schlichten Graph ist somit wenig sinnvoll). E_2 stellt dagegen sowohl die Beziehung zwischen den Mengen als auch die Beziehung zwischen den Elementen der Mengen dar. Die Beziehung zwischen den Elementen der Mengen wird durch die geordneten Paare, die auch als Kanten im Graphendiagramm zu sehen sind, beschrieben. Die Beziehung zwischen den Mengen stellen die Relationen in E_2 dar.[1)]

1) Die bildliche Darstellung der Relationen in E_2 wäre zu unübersichtlich und wurde daher weggelassen.

Der Vorteil einer Menge von Relationen (E_2 in Abschnitt 5.1.2) gegenüber einer Relation (E_2 in Abschnitt 5.1.1) zur Darstellung der Struktur im verfeinerten Graph liegt zum einen in der bijektiven Abbildung gegenüber einer voreindeutigen Relation beim Verfeinern und zum anderen in der impliziten Darstellung der Verfeinerungshierarchie, die zu einem Gebilde wie G_2 geführt hat.

Die implizite Verfeinerungshierarchie in den Gebilden, die durch das Abbilden von Knoten auf Knotenmengen und von Kanten auf Relationen entstehen, wird erst dann besonders deutlich, wenn nicht nur eine Verfeinerung, sondern mehrere Verfeinerungen nacheinander durchgeführt werden. Nach dem Verfeinern von G_2 nach G_3 besteht die Menge V_3 in G_3 aus Mengen von Mengen und die Menge E_3 in G_3 aus Mengen von Relationen. Die Mengen, die die Elemente der Menge V_3 bilden, beschreiben ebenso wie die Elemente der Menge V_1 oder der Menge V_2 die fünf Knoten des gröbsten Gebilde G_1 in der jeweils verfeinerten Form. Während die Verfeinerungsform der fünf Knoten in G_1 als "Elementarform" A, B, C, D und E und in G_2 als Menge von Elementarformen gegeben ist, werden die fünf gröbsten Knoten in V_3 als Menge von Mengen von Elementarformen beschrieben.

An Elementzahl einer Menge wie V_3 in einem Gebilde wie G_3 ist die Anzahl der gröbsten Elemente in der Verfeinerungshierarchie zu erkennen. Durch die Verschachtelungstiefe der Mengen ist die Anzahl der Verfeinerungen bekannt, die benötigt wurden, um das betrachtete Gebilde zu erzeugen. Die Elemente auf der untersten Stufe der Verfeinerunghierarchie stellen die Knoten des feinsten Gebildes dar. Mit Hilfe der zweiten Menge wie E_3 in G_3 sind die Beziehungen auf allen Verfeinerungsstufen bekannt. Die Anzahl der Elemente dieser zweiten Menge der Gebilde beschreibt die Anzahl der Kanten im gröbsten Gebilde und die geordneten Paare auf der untersten Stufe der Verschachtelungstiefe der Mengen (etwa von E_3) stellen die Knoten im feinsten Graph dar.

Die Verfeinerung des Knotens C_3 in G_3 auf die Menge der Knoten C_{31} und C_{32} in G_4 läßt die Erweiterung der Verschachtelungstiefe um eine weitere Menge erwarten. Dies ist jedoch nicht der Fall. V_4 aus G_4 besteht ebenso wie V_3 aus Mengen von Mengen und auch E_4 hat die gleiche Verschachtelungstiefe der Mengen wie E_3. Der Grund hierfür liegt in der Verfeinerungsstufe, in der sich der zu verfeinernde Knoten befindet.

Es werden ausschließlich Knoten der Elementarform verfeinert. Es ist zweckmäßig, sie in der Verfeinerungsstufe zu verfeinern, in der sie zum erstenmal entweder durch Hinzufügen oder aber infolge einer Verfeinerung in eines der Gebilde eingefügt wurden. Der Knoten C_3 entstand wie C_1 durch die Verfeinerung des Knotens C. Da C_1 der erste Knoten der zweiten Verfeinerungsstufe war, der verfeinert wurde, mußte mit G_3 eine neue Verfeinerungsstufe verwendet werden. Da C_3 ebenfalls auf der Stufe von G_2 verfeinert wurde, stellt G_4 keine neue Hierarchiestufe dar.

Durch die zu einer Verfeinerung inversen Abbildung von allen Mengen V eines beliebigen Gebildes $G = (V, E)$ in der in Abschnitt 5.1.2 beschriebenen Art, deren Elemente Elementarform besitzen, auf Elemente mit Elementarform sowie von allen Relationen in E von G auf geordnete Paare, wird G wieder auf den groben Graph vergröbert, von dem er zuvor verfeinert wurde.

Bei der Vergröberung und Verfeinerungsmöglichkeit durch bijektive Abbildungen von Knoten auf Mengen und von Kanten auf Relationen gibt es neben den Vorteilen gegenüber der Möglichkeit aus dem letzten Abschnitt 5.1.1 (bijektive Abbildungen, implizite Verferinerungshierarchie) zwei wesentliche Mängel. Zum einen sind die Gebilde, die durch die Verfeinerungen entstehen, keine Graphen. Zum anderen ist ein expilizites Einfügen von Schlingen in schlichte Graphen oder von Pfeilen in bipartite beziehungsweise gerichtene Graphen notwendig, um die interne Struktur eines verfeinerten Knotens darzustellen. Das letztgenannte Problem wird im nun folgenden Abschnitt 5.1.3 gelöst und eine Möglichkeit, mit der bijektive Abbildungen auf Graphen realisiert werden können, werden in Abschnitt 5.1.4 erläutert.

5.1.3. Vergröbern und Verfeinern von Knoten durch bijektive Abbildungen von Knoten auf Graphen und von Kanten auf Relationen

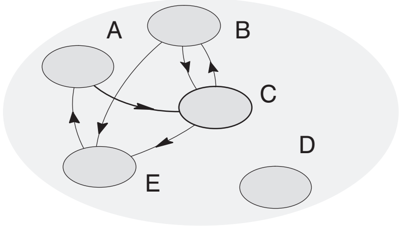
Es gibt eine zweite Möglichkeit, die Vergröberung und Verfeinerung von Graphen durch bijektive Abbildungen zu beschreiben. Dabei werden die Abbildungen eines Graphen auf einen Knoten als Knotenvergröberung beziehungsweise eines Knotens auf einen Graph als Knotenverfeinerung und die Abbildungen einer Relation auf eine Kante beziehungsweise einer Kante auf eine Relation verwendet.

Diese Vergröberungs– und Verfeinerungsmöglichkeit unterscheidet sich von bijektiven Abbildungen, die im letzten Abschnitt 5.1.2 aufgezeigt wurden, nur durch die Tatsache, daß die innere Struktur eines zu verfeinernden Knotens auf einen Graph abgebildet wird. Der entscheidene Vorteil hierbei ist, daß das notwendige Einfügen einer Schlinge oder im bipartiten Fall eines Pfeils zur Einhaltung der Strukturverträglichkeit bei der Abbildung eines Knotens auf eine Knotenmenge fortfallen kann, wenn der Knoten auf einen Graph verfeinert wird.

Der Graph, auf den ein Knoten bei einer Verfeinerung abgebildet wird, sollte den gleichen Typ haben, wie der Graph, in dem der Knoten enthalten ist. So führt eine Verfeinerung in einem schlichten Graph zu einem Gebilde mit einer Knotenmenge, dessen Elemente schlichte Graphen oder Gebilde mit schlichten Graphen sind. Eine Verfeinerung in einem bipartiten Graph führt analog zu einem Gebilde mit zwei Knotenmengen, deren Elemente bipartite Graphen oder Gebilde mit bipartiten Graphen sind. Eine Vergröberung eines Gebildes mit Graphen führt in Form der zur bijektiven Verfeinerung inversen Abbildung zurück auf das Ausgangsgebilde der Verfeinerung.

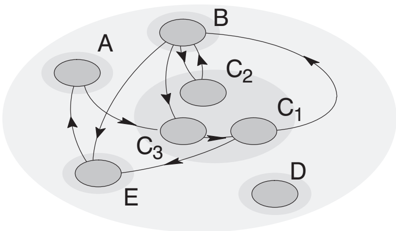
Wegen der mangelnden Möglichkeit einer korrekten bildlichen Darstellung[2)] sind die Graphendiagramme in Abbildung 26 zur Beschreibung der hier vorgestellten Vergröberungs– und Verfeinerungsmöglichkeit identisch zu den Graphendiagrammen in Abbildung 25 zur Beschreibung der Darstellungsformen der bijektiven Abbildungen in Abschnitt 5.1.2. Dagegen ist beim Vergleich der Mengenschreibweisen ein Unterschied in den Darstellungsformen gut erkennbar. Klar ist, daß die Kanten zur Darstellung der

2) Die Relationen der Mengen E_2, E_3 und E_4 sind in den Graphendiagrammen der beiden Abbildungen 25 und 26 aus Gründen der Übersichtlichkeit fortgelassen worden, sodaß nur die Kanten der jeweils feinsten Verfeinerungsstufe zu sehen sind.



$G_1 = (V_1; E_1)$

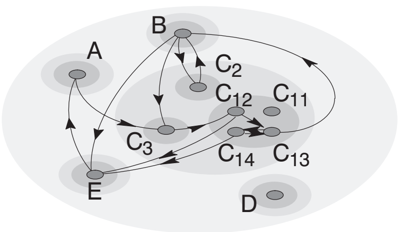
$V_1 = \{ A, B, C, D, E \}$
$E_1 = \{ (A,C), (B,C), (B,E), (C,B), (C,E), (E,A) \}$



$G_2 = (V_2; E_2)$

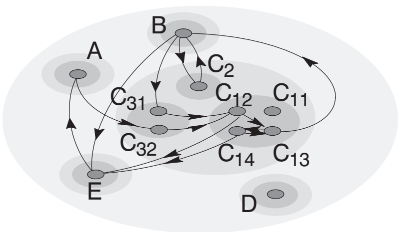
$V_2 = \{ (\{A\};\{\}), (\{B\};\{\}), (\{C_1, C_2, C_3\}; \{(C_3,C_1)\}),$
$\quad (\{D\};\{\}), (\{E\};\{\}) \}$
$E_2 = \{ \{(A,C_3)\}, \{(B,C_2),(B,C_3)\}, \{(B,E)\}, \{(C_1,B),(C_2,B)\},$
$\quad \{(C_1,E)\}, \{(E,A)\} \}$

$G_3 = (V_3; E_3)$



$V_3 = \{ (\{(\{A\};\{\})\};\{\}), (\{(\{B\};\{\})\};\{\}),$
$\quad (\{(\{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}\};$
$\quad\quad \{(C_{12},C_{13}), (C_{13},C_{14}), (C_{14},C_{13})\}),$
$\quad\quad (\{C_2\};\{\}), (\{C_3\};\{\})\}; \{(C_3,C_{12})\}\}),$
$\quad (\{(\{D\};\{\})\};\{\}), (\{(\{E\};\{\})\};\{\}) \}$
$E_3 = \{ \{\{(A,C_3)\}\}, \{\{(B,C_2)\}, \{(B,C_3)\}\}, \{\{(B,E)\}\},$
$\quad \{\{(C_{12},B),(C_{13},B)\}, \{(C_2,B)\}\},$
$\quad \{\{(C_{12},E),(C_{14},E)\}\}, \{\{(E,A)\}\} \}$

$G_4 = (V_4; E_4)$



$V_4 = \{ (\{(\{A\};\{\})\};\{\}), (\{(\{B\};\{\})\};\{\}),$
$\quad (\{(\{C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}\};$
$\quad\quad \{(C_{12},C_{13}), (C_{13},C_{14}), (C_{14},C_{13})\}), (\{C_2\};\{\}),$
$\quad\quad (\{C_{31}, C_{32}\};\{\})\}; \{\{(C_{31},C_{12}),(C_{32},C_{12})\}\}),$
$\quad (\{(\{D\};\{\})\};\{\}), (\{(\{E\};\{\})\};\{\}) \}$
$E_3 = \{ \{\{(A,C_{32})\}\}, \{\{(B,C_2)\}, \{(B,C_{31})\}\}, \{\{(B,E)\}\},$
$\quad \{\{(C_{12},B),(C_{13},B)\}, \{(C_2,B)\}\},$
$\quad \{\{(C_{12},E),(C_{14},E)\}\}, \{\{(E,A)\}\} \}$

Bild 26: Vergröbern und Verfeinern schlichter Graphen mit Abbildungen von Knoten auf Graphen und von Kanten auf Relationen

Schlingen wie (C,C) oder (C_1,C_1) gänzlich wegfallen. Wie weiterhin nicht anders zu erwarten war, bestehen die Mengen V_2, V_3 und V_4 in Abbildung 26 nicht aus Gebilden mit Mengen, sondern aus Gebilden mit Graphen.

Interessant ist jedoch die Beobachtung, daß die Kanten, die die innere Struktur eines verfeinerten Knoten beschreiben, nicht mehr in den Mengen E_2, E_3 und E_4, sondern in den Mengen V_2, V_3 und V_4 auftreten. So ist beispielsweise die Kante (C_3,C_1) in G_2 aus der Menge E_2 verschwunden und in Form einer Kante des Graphen mit den Knoten C_1, C_2 und C_3 in die Menge V_2 aufgenommen worden. Das bedeutet, daß die Kanten der inneren Struktur eines verfeinerten Knotens nicht mehr "global" mit allen übrigen Kanten des Gebildes in einer Menge E abgelegt sind, sondern "lokal" in einem Graphen, direkt bei den Knoten, zwischen denen sie die Beziehung beschreiben.

Wird ein Knoten eines Graphen G, der durch eine Verfeinerung entstanden ist, verfeinert, so wird der Graph G auf ein Gebilde, das keinen Graph darstellt, abgebildet. Zum Beispiel wird der Graph $(\{C_1,C_2,C_3\}; \{(C_3,C_1)\})$, der durch die Verfeinerung des Knotens C entstanden ist, beim Verfeinern des Knotens C_1 zu einem Gebilde mit einer Menge von Graphen und einer Menge von Relationen.

Die Darstellungsformen, die durch das Abbilden von Knoten auf Graphen und von Kanten auf Relationen entstehen, beschreiben anstatt Graphen schwer definierbare Gebilde und werden sehr schnell sehr unübersichtlich. Dafür bilden sie aber eine noch eindeutigere Verfeinerungshierarchie als die Verfeinerungsmöglichkeit in Abschnitt 5.1.2, da die inneren Strukturen direkt den Knoten zugeordnet werden, die durch eine Verfeinerung entstanden sind.

5.1.4. Vergröbern und Verfeinern von Knoten durch bijektive Abbildungen von Knoten auf Anschlußgraphen

Die Verfeinerung einer unstrukturierten Menge kann durch die bijektive Abbildung ihrer Elemente auf jeweils eine Menge realisiert werden. Die Vergröberung ist durch eine zur Verfeinerung inversen Abbildung möglich. Sie führt die Mengen, die durch eine Verfeinerung entstanden sind, zurück auf die Elemente der gröberen Menge, aus der sie verfeinert wurden. Durch eine wiederholte Verfeinerung von Elementen einer verfeinerten Menge entsteht rekursiv eine Menge von Mengen.

Das Verfeinern eines Graphen durch bijektive Abbildungen seiner Knoten auf einen Graph, dessen Knoten ebenfalls Graphen sind, ist mit den Definitionen (1), (2) und (3) nicht möglich, da mit einem solchen Graph vom Graphen G lediglich die Beziehung zwischen den Graphen G nicht aber zwischen den Knoten der Graphen G beschrieben werden können. Die Abbildung der Kanten auf Relationen, mit denen die Beziehungen zwischen den Knoten der Graphen eines Graphen dargestellt werden können, führen bei der Verfeinerung eines Graphen zu Gebilden, die jedoch keine Graphen sind. Durch eine Modifikation der Graphendefinitionen (1), (2) und (3) ist es dennoch möglich, wie bei den Mengen rekursiv erzeugte Graphen von Graphen für das Vergröbern und Verfeinern von Graphen zu verwenden.

Das Problem beim Verfeinern eines Graphen im Gegensatz zum Verfeinern einer unstrukturierten Menge sind die inzidenten Kanten zu den zu verfeinernden Knoten. Ein rekursives Verfeinern von Graphen ist nur dann möglich, wenn die inzidenten Kanten zu den zu verfeinernden Knoten nicht separat abgebildet werden müssen, sondern mit den Knoten zusammen verfeinert werden können. Ein solches gleichzeitiges Verfeinern ist nur dann möglich, wenn die inzidenten Kanten ebenso wie die Schlingen oder Knoten zur Darstellung der inneren Struktur in die strukturierte Menge des verfeinerten Knoten mit aufgenommen werden. Da bei der Beschreibung einer solchen strukturierten Menge mit Graphen nach (1), (2) und (3) nicht möglich ist, ist die Definition geeigneter (Anschluß−) Graphen durch eine Veränderung der bekannten Definitionen erforderlich.

Definition: Ein schlichter Anschlußgraph G_C besteht aus einer Menge V, einer homogenen binären Relation E auf V, einer Menge C und zwei heterogenen binären Relationen E_{VC} und E_{CV}.

$$G_C := (V; E; C; E_{VC}, E_{CV}) \tag{4}$$

$$\textit{mit} \quad E \subseteq V \times V \quad \textit{sowie} \quad E_{VC} \subseteq V \times C \quad \textit{und} \quad E_{CV} \subseteq C \times V$$

Definition: Ein bipartiter Anschlußgraph G_C besteht aus zwei unterschiedlichen Mengen V_1 und V_2, aus zwei heterogenen binären Relationen R_{12} beziehungsweise R_{21} auf V_1 und V_2 beziehungsweise auf V_2 und V_1 sowie aus zwei Mengen C_1 und C_2 mit den vier heterogenen binären Relationen $R_{VC1} \subseteq V_1 \times C_1$, $R_{CV1} \subseteq C_1 \times V_1$, $R_{VC2} \subseteq V_2 \times C_2$, $R_{CV2} \subseteq C_2 \times V_2$.

$$G_C := (V_1, V_2; R_{12}, R_{21}; C_1, C_2; R_{VC1}, R_{CV1}, R_{VC2}, R_{CV2}) \tag{5}$$

$$\begin{array}{lll} \textit{mit} & R_{12} \subseteq V_1 \times V_2, & R_{21} \subseteq V_2 \times V_1 \\ \textit{sowie} & R_{VC1} \subseteq V_1 \times C_1, & R_{CV1} \subseteq C_1 \times V_1 \\ \textit{und} & R_{VC2} \subseteq V_2 \times C_2, & R_{CV2} \subseteq C_2 \times V_2 \end{array}$$

Definition: Ein gerichteter Anschlußgraph G_C ist ein bipartiter Anschlußgraph, wobei die Elemente der zweiten Menge nur in einem geordneten Paar der ersten Relation und nur in einem geordneten Paar der zweiten Relation auftreten dürfen.

$$G_C := (V, A\,; R_{VA}, R_{AV}; C_V, C_A; R_{VC}, R_{CV}, R_{AC}, R_{CA}) \tag{6}$$

$$\begin{array}{lll} \textit{mit} & R_{VA} \subseteq V \times A, & R_{AV} \subseteq A \times V \\ \textit{sowie} & R_{VC} \subseteq V \times C_V, & R_{CV} \subseteq C_V \times V \\ \textit{und} & R_{AC} \subseteq A \times C_A, & R_{CA} \subseteq C_A \times A \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \textit{wobei für alle } a \in A \textit{ und für alle } u, v \in V \textit{ gilt :} \\ (u, a) \in R_{VA} \ \wedge \ u \neq v \quad \Rightarrow \quad (v, a) \notin R_{VA} \\ (a, u) \in R_{AV} \ \wedge \ u \neq v \quad \Rightarrow \quad (a, v) \notin R_{AV} \end{array}$$

Ein Anschlußgraph ergibt sich durch Hinzufügen einer Menge C beziehungsweise im bipartiten Fall zweier Mengen C_1 und C_2 (oder C_V und C_A) zu einem üblichen Graph nach

(1), (2) oder (3). Die zusätzlichen Mengen werden durch zusätzliche heterogene Relationen mit der Menge V beziehungsweise den Mengen V_1 und V_2 (oder V und A) in Beziehung gesetzt. Die Elemente dieser zusätzlichen Mengen beschreiben die Nachbarknoten eines Graphen; Das heißt, das diese Knoten, die nicht zum eigentlichen Graph gehören, aber doch Nachbarknoten zu den Knoten dieses Graphen sind. Da über diese Nachbarknoten und deren inzidenten Kanten, die mit dem eigentlichen Graph verbunden sind, der strukturverträgliche Anschluß eines Graphen, der aus einer Verfeinerung entstanden ist, zum übrigen verfeinerten Graph hergestellt wird, heißen sie **Anschlußknoten** oder kurz Anschlüsse (englisch "connexion"). Ein Graph mit Anschlußknoten wird Anschlußgraph genannt. Ein Anschlußgraph ohne Anschlußknoten beschreibt einen Graph nach (1), (2) oder (3). Die Menge C beziehungsweise die Mengen C_1 und C_2 sind in diesem Fall leer.

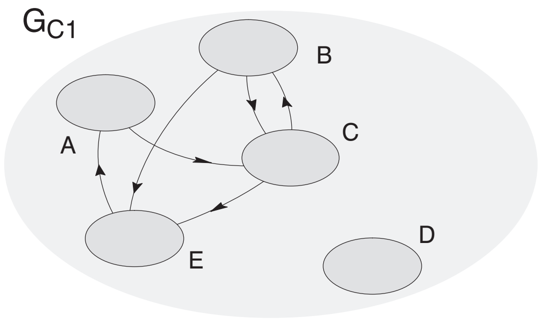
Um einen Anschlußgraph zu verfeinern, werden seine Knoten auf Anschlußgraphen abgebildet. Dabei müssen alle Nachbarknoten zu jedem Knoten v als Anschlußknoten in den entsprechenden Anschlußgraph G_C des zu verfeinernden Knotens v aufgenommen werden. Alle inzidenten Kanten der Nachbarknoten zu oder von v sind auf mindestens eine Kante in G_C abzubilden, von der ein Element der entsprechende Anschlußknoten ist. Die Knoten der Menge V beziehungsweise der Mengen V_1 und V_2 (oder V und A) dürfen nicht identisch zu einem Knoten der Menge V beziehungsweise der Mengen V_1 und V_2 (oder V und A) im gröberen Anschlußgraph sein.

Da sich sowohl die innere Struktur, als auch die strukturverträglichen Anschlüsse in jedem Anschlußgraph befinden, der durch die Verfeinerung entstanden ist, stellt diese Abbildung auf einen rekursiv erzeugten Anschlußgraph von Anschlußgraphen eine korrekte Verfeinerung dar. Da die Verfeinerung eines Anschlußgraphen G_C bijektiv ist, führt die inverse Abbildung eines von G_C verfeinerten Anschlußgraphen wieder zu G_C.

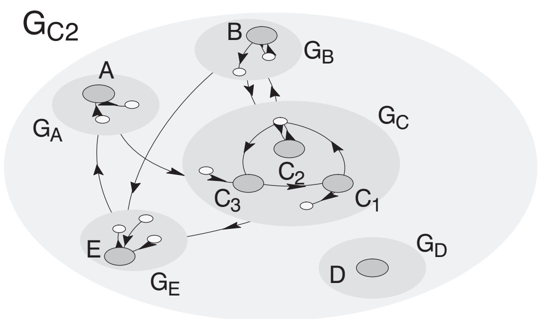
Die Abbildung 27 zeigt die Darstellungsformen der Anschlußgraphen zum Beispiel der Flugroutennetzdarstellung. Besonders gut ist die Rekursivität der Verfeinerung von Anschlußgraphen sowohl in der Folge der Verfeinerungen als auch in dem feinsten Anschlußgraph G_{C3} zu erkennen. Deutlich wird auch, daß durch die Aufnahme der Anschlußknoten in die Anschlußgraphen keine Kante zwischen den Knoten zweier verschiedener Anschlußgraphen existiert.[3)] In G_{C3} sind nicht nur Kanten für die kleinste Verfeinerungsstufe, sondern für jede Verfeinerungsstufe zu erkennen. So ist beispielsweise die Identität der Struktur in G_{C1} mit der Struktur, die die Kanten zwischen den Knoten des Anschlußgraphen G_{C3} zeigt, sehr auffällig.

Die Redundanz, die durch die Aufnahme der Anschlußknoten und Anschlußkanten in jeden Anschlußgraph von Anschlußgraphen entsteht, wird durch die Überlegung relativiert, daß das Vergröbern und Verfeinern nur für sehr große Graphen zweckmäßig ist und daß die Redundanzen der Anschlußknoten im Vergleich zum Umfang großer Graphen ziemlich gering sind.

3) In der Abbildung 27 sind in den Graphendiagrammen keine Informationen fortgelassen worden. Mengen von Relationen, die in den Abbildungen 25 und 26 aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen werden mußten, existieren hier nicht.

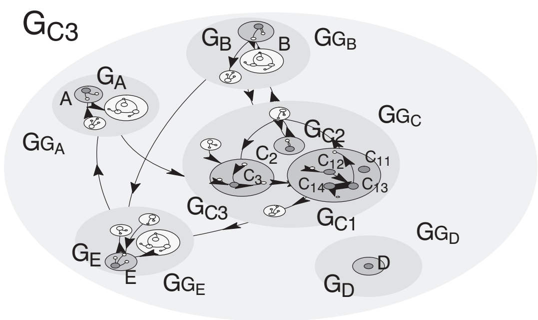


$$\begin{aligned} G_{C1} = (\ & \{ A, B, C, D, E \}; \\ & \{ (A,C), (B,C), (B,E), (C,B), (C,E), (E,A) \}; \\ & \{\} ; \{\} , \{\}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} G_{C2} = (\ & \{ G_A, G_B, G_C, G_D, G_E \}; \\ & \{ (G_A,G_C), (G_B,G_C), (G_B,G_E), \\ & \quad (G_C,G_B), (G_C,G_E), (G_E,G_A) \}; \\ & \{\} ; \{\} , \{\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_A = \ & (\{A\}; \{\}; \{C,E\}; \{(A,C)\}, \{(E,A)\}) \\ G_B = \ & (\{B\}; \{\}; \{C,E\}; \{(B,C), (B,E)\}, \{(C,B)\}) \\ G_C = \ & (\{C_1,C_2,C_3\}; \{(C_3,C_1)\}; \{A,B,E\}; \\ & \{(C_1,B), (C_1,E),(C_2,B)\}, \\ & \{(A,C_3), (B,C_2), (B,C_3)\}) \\ G_D = \ & (\{D\}; \{\}; \{\}; \{\}, \{\}) \\ G_E = \ & (\{E\}; \{\}; \{A,B,C\}; \\ & \{(E,A)\}, \{(B,E), (C,E)\}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} G_{C3} = (\ & \{ G_{G_A}, G_{G_B}, G_{G_C}, G_{G_D}, G_{G_E} \}; \\ & \{ (G_{G_A},G_{G_C}), (G_{G_B},G_{G_C}), (G_{G_B},G_{G_E}), \\ & \quad (G_{G_C},G_{G_B}), (G_{G_C},G_{G_E}), (G_{G_E},G_{G_A}) \}; \\ & \{\} ; \{\} , \{\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{G_A} = (\ & \{G_A\}; \{\}; \{G_C,G_E\}; \\ & \{(G_A,G_C)\}, \{(G_E,G_A)\}) \\ G_{G_B} = (\ & \{G_B\}; \{\}; \{G_C,G_E\}; \\ & \{(G_B,G_C), (G_B,G_E)\}, \{ (G_C,G_B)\}) \\ G_{G_C} = (\ & \{G_{C1}^*,G_{C2}^*,G_{C3}^*\}; \{(G_{C3}^*,G_{C1}^*)\}; \\ & \{G_A,G_B,G_E\}; \\ & \{(G_{C1}^*,G_B), (G_{C1}^*,G_E), (G_{C2}^*,G_B)\} \\ & \{(G_A,G_{C3}^*), (G_B,G_{C2}^*), (G_B,G_{C3}^*)\}) \\ G_{G_D} = (\ & \{G_D\}; \{\}; \{\}; \{\}, \{\}) \\ G_{G_E} = (\ & \{G_E\}; \{\}; \{G_A,G_B, G_C\}; \\ & \{(G_E,G_A)\}, \{(G_B,G_E), (G_C,G_B)\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{C1}^* = \ & (\{C_{11},C_{12},C_{13},C_{14}\}; \\ & \{(C_{12},C_{13}), (C_{13},C_{14}), (C_{14},C_{13})\} \\ & \{C_3,B,E\}; \\ & \{(C_{12},E),(C_{13},B),(C_{14},E)\}, \\ & \{(C_3,C_{12})\}) \\ G_{C2}^* = \ & (\{C_2\}; \{\}; \{B\}; \{(C_2,B)\}, \{(B, C_2)\}) \\ G_{C3}^* = \ & (\{C_3\}; \{\}; \{C_1,A,B\}; \\ & \{(C_3,C_1)\}, \{(A,C_3), (B,C_3)\}) \end{aligned}$$

Bild 27: Vergröbern und Verfeinern schlichter Graphen mit Abbildungen von Knoten auf Anschlußgraphen

5.2. Vergröbern und Verfeinern von Knotenverbindungen

Graphen stellen Mengen dar, denen eine Struktur aufgeprägt ist. Die Strukturen werden durch binäre Relationen beschrieben, die die Knoten der Graphen in Verbindung setzen. Im folgenden soll unter dem Begriff ”Knotenverbindung” ein Weg der Länge 1 von einem Knoten einer Graphenmenge zu einem anderen Knoten derselben Menge verstanden werden. So ist die Knotenverbindung in einem schlichten Graph eine Kante. In einem bipartiten Graph wird eine Knotenverbindung zwischen zwei Knoten u und v der einen Graphenmenge V_1 durch einen Knoten w aus der zweiten Menge V_2 sowie den Kanten (u,w) und (w,v) beschrieben. In einem gerichteten Graph wird eine Knotenverbindung zwischen zwei Knoten durch einen Pfeil und den inzidenten Kanten zum Pfeil dargestellt.

Es gibt Aufgaben, in denen es notwendig ist, nicht (nur) die Knoten eines Graphen zu vergröbern oder zu verfeinern, sondern (auch) explizit die Knotenverbindungen. Ein Beispiel für eine solche Aufgabe ist das Reduzieren und Expandieren von symbolhaften Straßennetzdarstellungen mit Hilfe von Graphen (siehe Abbildung 17). Beim Verfeinern einer solchen Straßennetzdarstellung entstehen durch den Anschluß eines untergeordneten Wegenetzes an ein übergeordnetes Wegenetz neue Verkehrsknotenpunkte, die zwangsläufig zur Verfeinerung der übergeordneten Wege führen. Wird das Straßennetz nicht durch einen streckenorientierten Graph dargestellt, in dem die Wege die Knoten sind, so müssen die Wege als Knotenverbindungen verfeinert werden.

In diesem Abschnitt 5.2 wird nacheinander das Vergröbern und Verfeinern von Knotenverbindungen in schlichten, bipartiten und gerichteten Graphen untersucht. Anschließend wird die Kombination der Vergröberung oder Verfeinerung von Graphen mit der Reduktion und Expansion von Graphen beschrieben.

Knotenverbindungen in schlichten Graphen

Die Knotenverbindungen in schlichten Graphen sind Kanten. Kanten sind geordnete Paare. Geordnete Paare sind keine Objekte mit Eigenschaften, wie etwa Knoten, sondern stellen nur die Aussage dar, daß das erste mit dem zweiten Element des geordneten Paares in Relation steht. Eine Verfeinerung einer solchen Aussage ist sinnlos. Daher können die Knotenverbindungen in schlichten Graphen nicht verfeinert oder vergröbert werden.

So entspricht beispielsweise das Ersetzen einer Kante durch einen Weg der Länge 2 über einen neuen Knoten keiner Verfeinerung, sondern einem Löschen der Kante und einem Hinzufügen des Knotens mit den beiden Kanten, die zusammen den Weg bilden (siehe etwa Abbildung 17, links unten).

Knotenverbindungen in bipartiten Graphen

Da in einem allgemeinen bipartiten Graph die beiden Mengen, die über zwei heterogene binäre Relationen miteinander in Beziehung stehen, gleichwertig sind, ist das Vergröbern und Verfeinern der einen Menge identisch zum Vergröbern und Verfeinern der anderen Menge. Da in bipartiten Graphen eine Knotenverbindung einem Knoten der jeweils anderen Menge mit den entsprechenden Kanten entspricht, ist das Vergröbern und Verfeinern von Knotenverbindungen in einem bipartiten Graph identisch zum Vergröbern und Verfeinern von Knoten.

Knotenverbindungen in gerichteten Graphen

Das Verfeinern einer Knotenverbindung in einem gerichteten Graph entspricht einer Verfeinerung eines Pfeils mit zwei inzidenten Kanten. Das Verfeinern von Pfeilen wird unter anderem auch beim Verfeinern von Knoten in einem gerichteten Graph notwendig, wenn der Knoten in mehrere Knoten verfeinert wird, die über eine Kante mit dem Pfeil verbunden sind. Bei der dann erforderlichen Verfeinerung des Pfeils entsteht keine innere Struktur; das heißt, die Pfeile der Verfeinerung stehen nicht zueinander in Beziehung.

Sollen die Pfeile so verfeinert werden, daß beispielsweise ein Weg aus Pfeilen und Knoten entsteht, so wird eine innere Struktur benötigt. Dies stellt jedoch in einigen Fällen ein Problem dar. Soll ein Pfeil durch eine Abbildung auf mehrere Pfeile oder auf eine Menge von Pfeilen abgebildet werden, während die Knoten, wie in den Abschnitten 5.1.1 und 5.1.2 auf mehrere Knoten oder auf eine Menge von Knoten abgebildet werden, so ist es nicht möglich, die innere Struktur im gröberen Graph darzustellen.

Zur Darstellung der inneren Struktur eines Pfeils p wird ein zusätzlicher Knoten v benötigt, der über die Kanten (v,p) und (p,v) mit dem Pfeil verbunden ist. Diese notwendigen zusätzlichen Kanten verletzen jedoch die Grundbedingung gerichteter Graphen, daß Pfeile nur zwei inzidente Kanten haben dürfen. Das Vergröbern und Verfeinern von Pfeilen, die eine innere Struktur besitzen, ist mit Hilfe der Abbildungen eines Pfeils auf Pfeile oder auf eine Menge von Pfeilen nicht möglich.

Wird ein Pfeil auf einen Graph oder auf einen Anschlußgraph bijektiv abgebildet, so muß die innere Struktur im gröberen Graph mit dem Pfeil nicht explizit beschrieben werden, da sie im Graph oder im Anschlußgraph, auf den der Pfeil abgebildet wird, enthalten ist. Auf diese Weise kann ein Pfeil mit innerer Struktur doch verfeinert werden.

Die Vergröberung und Verfeinerung von Knotenverbindungen in gerichteten Graphen ohne innere Struktur ist in jedem Fall wie bei bipartiten Graphen möglich. Die Vergröberung und Verfeinerung der Knotenverbindungen in gerichteten Graphen mit innerer Struktur ist mit bijektiven Abbildungen der Pfeile auf Graphen oder Anschlußgraphen realisierbar.

Kombination der Vergröberung oder Verfeinerung von Graphen mit der Reduktion und Expansion von Graphen

Einen Graph zu reduzieren bedeutet, Knoten und Kanten aus dem Graph zu entfernen. Einen Graph zu expandieren bedeutet, Knoten und Kanten zum Graph hinzuzufügen. Das Entfernen und Hinzufügen von Knoten und Kanten sind Grundoperationen von Graphen. Sie stellen keine Abbildung dar. Das Entfernen und Hinzufügen vieler Knoten und Kanten in Form eines Graphen, wie es beispielsweise beim Reduzieren und Expandieren einer symbolhaften Wegenetzdarstellung auftritt, ist durch die Bildung eines Differenzgraphen oder eines Vereinigungsgraphen möglich. Auch dies sind Grundoperationen eines Graphen, die keine Schwierigkeiten bereiten.

Probleme ergeben sich bei der Reduktion und Expansion von Graphen in Verbindung mit dem Vergröbern und Verfeinern von Graphen. Wird beispielsweise aus einem groben Graph, der bereits verfeinert wurde, ein Knoten entfernt, so sollte die Verfeinerung dieses Knotens in den verfeinerten Graphen ebenfalls gelöscht werden. Weitaus unübersichtlicher wird es, wenn ein Knoten in einem bereits verfeinerten groben Graph eingefügt wird, denn es stellt sich die Frage, wie die notwendigen Verfeinerungen dieses Knoten in den feineren Graphen aussehen. Diese Probleme, die mit dem Vergröberung und Verfeinern von Graphen an sich nichts zu tun haben, werden im folgenden Kapitel über hierarchische Graphensysteme zur systematischen Vergröberung und Verfeinerung von Graphen analysiert.

Relativ einfach ist der Vorgang des Expandierens einer symbolhaften Wegenetzdarstellung. Hierbei werden die Graphen nur in der Weise expandiert, daß sie auf bestimmten Verfeinerungsstufen mit dem Graph eines untergeordneten Straßennetz vereinigt werden, sodaß sich der in Abbildung 28 dargestellte Mechanismus von Verfeinern und Expandieren ergibt: Jedes Straßennetz einer bestimmter Ordnung (Straßenkategorie) wird für sich so verfeinert, so daß das jeweils neu einzufügende untergeordnete Straßennetz an dieses übergeordnete Netz durch eine Graphenvereinigung ”angschlossen” werden kann.

5.3. Bewertung von schlichten, bipartiten und gerichteten Graphen zur Darstellung von Wegenetzen unter Berücksichtigung der Vergröberung und Verfeinerung

Nicht zuletzt durch die Betrachtung der Vergröberung und Verfeinerung von Knotenverbindungen wurde deutlich, daß nur die Knoten eines Graphen vergröbert und verfeinert werden können. Für Wegenetzdarstellungen bedeutet dies, wenn für eine Anwendung ausschließlich die Flächen, Wege oder Orte in einem Wegenetz vergröbert oder verfeinert werden sollen, hierzu schlichte Graphen ausreichen. Sollen sowohl die Orte als auch die Wege vergröbert und verfeinert werden, so sind in jedem Fall zwei verschiedene Mengen notwendig, und somit ein bipartiter Graph. Ist bei der Wegenetzdarstellung die Richtung für eine Anwendung von besonderer Bedeutung, so sind gerichtete Graphen zu verwenden.

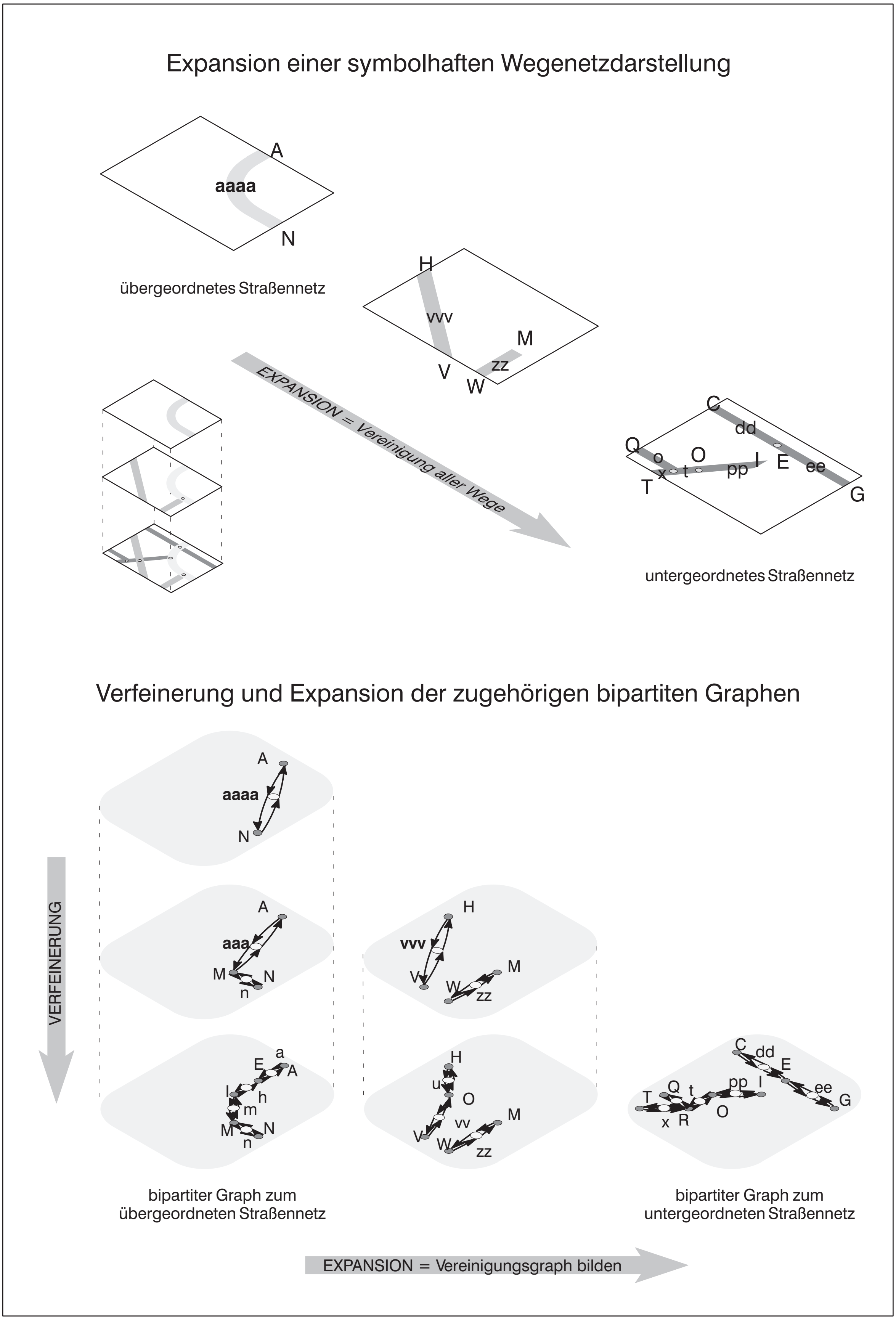


Bild 28: Kombination von Verfeinern und Expandieren eines bipartiten Graphen

Für maßstäbliche Darstellungen von Wegenetzen sollten schlichte Graphen gewählt werden. Die Vergröberung und Verfeinerung einer maßstäblichen Wegenetzdarstellung erfordert die Vergröberung und Verfeinerung der Knoten eines schlichten Graphen. Die Reduktion und Expansion einer maßstäblichen Wegenetzdarstellung erfordert die Reduktion und Expansion eines schlichten Graphen. Eine Kombination der Vergröberung und Verfeinerung mit der Reduktion und Expansion ist nicht notwendig.

Für die symbolhafte Darstellung von Orten oder von Wegen in Wegenetzen sind schlichte Graphen ebenfalls sinnvoll. Während die Vergröberung und Verfeinerung von Orten (Wegen) als Knoten kein Problem darstellt, ist die Vergröberung und Verfeinerung eines Weges (Ortes) zwischen zwei solchen Orten (Wegen) nicht möglich. Wird beispielsweise die Flugroute von Ort A nach Ort B durch eine Flugroute von A über der Knoten C nach B ersetzt, so ist dies in einem schlichten Graph durch eine Verfeinerung nicht darstellbar. Soll dieser Vorgang des Ersetzens trotzdem als Verfeinerung beschrieben werden, so ist die Wahl des Graphen falsch gewesen. Die Beschreibung der Flugroute muß in diesem Fall ebenfalls als Knoten beschrieben werden. Die zweckmäßigste Möglichkeit zur Beschreibung von zwei in Beziehung stehenden Mengen ist ein bipartiter (gerichteter) Graph.

Mit dem umgangssprachlichen ”Verfeinern eines Wegenetzes” ist meist die Expansion einer Straßennetzdarstellung gemeint. Straßennetze sollten als bipartite Graphen dargestellt werden, da nur diese eine topologisch und geometrisch korrekte Expansion der Straßennetzdarstellung zulassen. So laßt auch nur sie eine Kategorisierung der Wege und Orte zu, wie sie in den Straßenkarten verwendet werden. Der Vorgang wurde an Ende des letzten Abschnitts beschrieben.

Bei der Vergröberung und Verfeinerung gerichteter Graphen sollten die Abbildungsmöglichkeiten aus den Abschnitten 5.1.3 und 5.1.4 bevorzugt werden, da sie ein Vergröbern und Verfeinern der Pfeile und somit der Wegerichtung mit einer inneren Struktur erlauben. In Straßennetzdarstellungen ist darauf zu achten, daß die Orte, die neben den entsprechenden Kanten die innere Struktur eines Pfeils beschreiben, nur dann neue Verkehrsknotenpunkte im feinen Straßennetz darstellen können, wenn sie nach der Verfeinerung des Pfeils mit den anderen Knoten, die den Verkehrsknotenpunkt bilden, zusammengefaßt werden.

6. Hierarchische Graphensysteme

Das Vergröbern und Verfeinern von Graphen führt zu Hierarchien von Graphen. Diese Hierarchien treten zum einen in Form der Abfolge der Vergröberungs– beziehungsweise Verfeinerungsschritte auf und zum anderen in den Gebilden, die durch das Vergröbern beziehungsweise das Verfeinern notwendig wurden.

Die Vorteile bei der Behandlung großer Graphen durch Vergröberungen und Verfeinerungen ergeben sich vor allem durch Ausnutzung der bei diesen Abbildungen entstehenden Verfeinerungshierarchien. Nicht die Vergröberung oder Verfeinerung an sich verbessert die Arbeit mit großen Graphen, sondern der Zusammenhang von groben und feinen Graphen. Weder eine bessere Verwaltung des notwendigen Speicherplatzes noch eine Effizienzsteigerung der Algorithmen oder eine gute Handhabung großer Graphen wird durch eine Vergröberung oder Verfeinerung erreicht. Dies kann nur mit einer günstigen Ausnutzung der Hierarchien, die beim Vergröbern und Verfeinern der Graphen entstehen, geschehen.

So ist beispielsweise die Vergröberung eines großen feinen Graphen im Rahmen einer Routensuche nur dann zweckmäßig und effektiv, wenn im entsprechenden vergröberten Graph der kürzeste Weg zwischen den zu dem Start– und Zielknoten im feinen Graph relevanten Knoten gesucht wird und wenn nach einer erfolgreichen Suche im groben Graph auch wirklich nur noch die Bereiche im feinen Graph bei der Routensuche untersucht werden, durch die der kürzeste Weg im entsprechenden groben Graph führte.

Da die Behandlung der Verfeinerungshierachien von Graphen besonders bei steigender Knoten– und Kantenzahl sowie bei Zunahme der Hierachiestufen sehr umfangreich und schwer kontrollierbar wird, sollte hierfür ein System zur Unterstützung der Arbeit mit vergröberten und verfeinerten Graphen entwickelt werden.

Ein solches hierarchisches Graphensystem hat die Aufgabe der effizienten rechnergestützten Organisation, Erzeugung, Manipulation und Verwaltung der Verfeinerungshierarchien großer Graphen. Somit kann ein hierarchiches Graphensystem beispielsweise mit einem Datenbanksystem zur Verwaltung der Speicherung großer Datenmengen verglichen werden, wobei ein Graphensystem in erster Linie nicht zur Speicherung von Graphen verwendet werden soll, sondern zur Unterstützung der Vergröberung und Verfeinerung während des Rechenprozesses.

Die wichtigsten Aufgaben eines hierarchischen Graphensystems sind

- der Aufbau und die Modifikation der Verfeinerungshierarchie.
- die Unterstüzung des Vergröberns und Verfeinerns von Graphen.
- die Unterstützung aller Grundoperationen auf Graphen unter Berücksichtigung der Zusammenhänge in der Hierarchie.
- die Sicherstellung der Integrität des Systems. Dies gilt besonders für die Konsistenz zwischen den Graphen auf den unterschiedlichen Verfeinerungsstufen.
- die Ermöglichung einer leichten Handhabung des Systems.

- die Unterstützung effizienter Algorithmen. Wünschenswert ist dabei ein möglichst automatisches Erkennen und Ausführen der hierzu notwendigen Operationen im Graphensystem.
- die effektive (Zwischen−) Speicherung notwendiger Informationen für die Verfeinerungshierarchie von Graphen.

In den Abschnitten 6.1 bis 6.3 dieses Kapitels werden zunächst geeignete Strukturierungen für ein hierarchisches Graphensystem zur Unterstützung der Vergröberung und Verfeinerung von Graphen untersucht. Dann werden die Grundoperationen eines solchen Systems analysiert. Besonders wichtig sind hierbei die Operationen des Vergröberns und Verfeinerns sowie des Einfügens und Löschens von Knoten und Kanten. Zum Abschluß wird anhand einer Routensuche der Vorteil von Verfeinerungshierarchien zur Lösung von Aufgaben in großen Graphen aufgezeigt.

6.1. Strukturierungen von hierarchischen Graphensystemen

Die Strukturierung eines Graphensystems zur Unterstützung der Vergröberung und Verfeinerung ergibt sich neben den unterschiedlich feinen Graphen aus den gewählten Abbildungen zur Beschreibung der Vergröberungen und Verfeinerungen sowie aus der Darstellung dieser Abbildungen.

Werden die Graphen beziehungsweise Gebilde, die durch eine Vergröberung oder Verfeinerung notwendig werden, nach ihrer Verfeinerungstiefe sortiert, so bildet diese Sortierung bereits die Hierarchie eines Graphensystems. Durch die Sortierung ist festgelegt, wo sich ein Graph beziehungsweise ein Gebilde in der Hierarchie befindet. Diese Gebilde alleine reichen jedoch für die Struktur eines funktionierenden Systems noch nicht aus. Es fehlen die genauen Zusammenhänge und Übergänge zwischen den übereinanderliegenden Hierarchiestufen. Diese Verbindungen werden durch die Darstellungen der Abbildungen zur Vergröberung oder Verfeinerung der Graphen erreicht.

Ein hierarchisches Graphensystem besteht also prinzipiell aus unterschiedlich feinen Graphen oder Gebilden, die entsprechend erfolgter Vergröberungs− und Verfeinerungsvorgänge sortiert sind, und den Vergröberungs− und Verfeinerungsabbildungen, die die Zusammenhänge und Übergänge zwischen den Graphen oder Gebilden gewährleisten (siehe Abbildung 29).

Im Abschnitt 5.1 wurden vier Möglichkeiten von Abbildungen zur Vergröberung und Verfeinerung von Graphen vorgestellt. Die dabei enstandenen Gebilde, die wie im Beispiel der Flugroutennetzdarstellung übereinander angeordnet werden, bilden die Hierarchien. Somit ergeben sich jeweils für schlichte, bipartite und gerichtete Graphen vier unterschiedliche Typen von hierarchischen Graphensystemen. Innerhalb eines Graphensystemtypen können durch die verschiedenen Varianten der Graphen− und der Abbildungsdarstellung weitere Differenzierungen entstehen. Mögliche Darstellungen von Graphen sind in Abbildung 2 gezeigt und sollen an dieser Stelle nicht weiter vertieft werden.

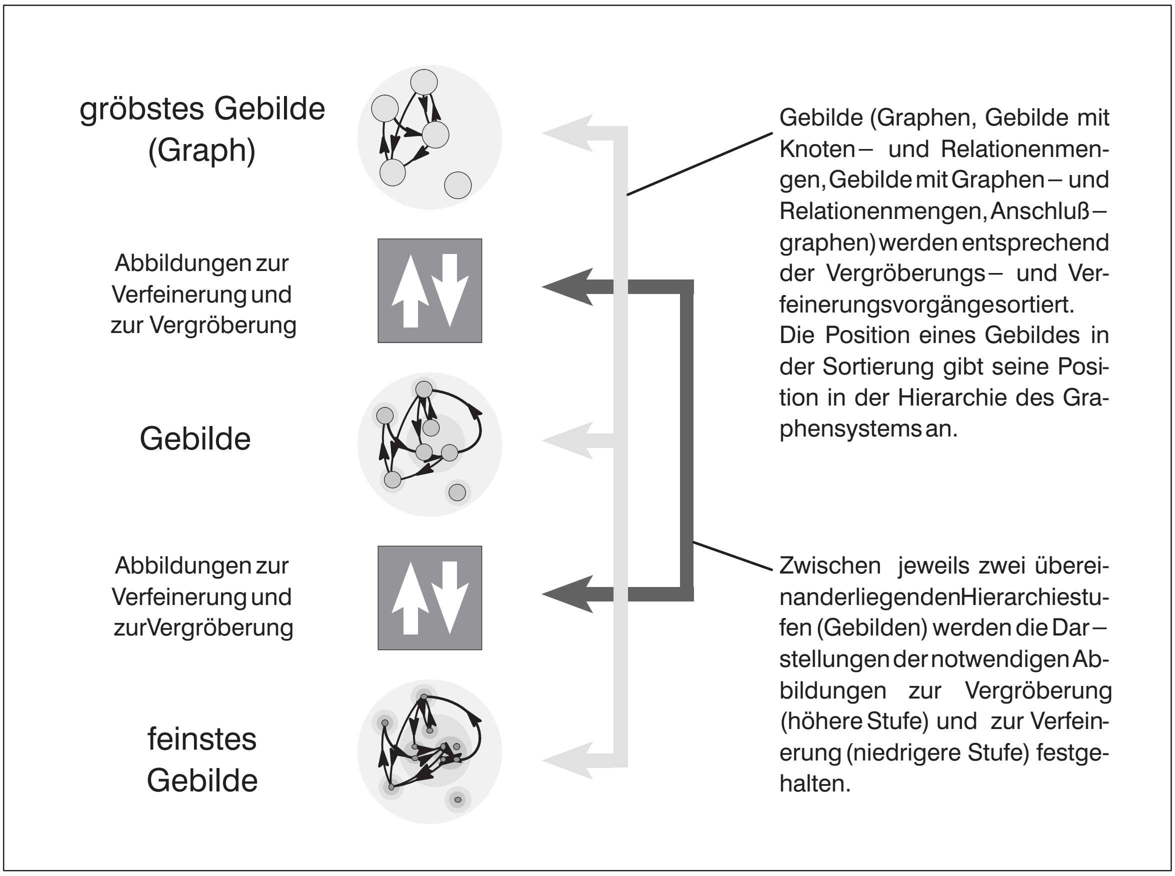


Bild 29: Prinzip eines hierarchischen Systems zur Vergröberung und Verfeinerung von Graphen

Eine Darstellungsmöglichkeit für Abbildungen ist die Form einer algebraischen Funktion, der ein Graph als Argument übergeben wird, und die einem Graph den Funktionswert als Rückgabe zuordnet. Für Abbildungen zwischen der Vergröberung und Verfeinerung von Graphen ist diese Form nicht zweckmäßig, da sie eine feste Abbildungsvorschrift besitzt (es sei denn, die Vorschrift wird ebenfalls als Parameter an die Funktion übergeben), während jede Vergröberung oder Verfeinerung von Graphen jeweils eine neue oder veränderte Abbildung (Funktion) erfordert.

Abbildungen sind heterogene binäre Relationen. Jede Vergröberung benötigt mindestens eine Abbildung und und jede Verfeinerung benötigt mindestens eine zur entsprechenden Vergröberung inverse Relation. Für die Darstellung einer heterogenen binären Relation auf den Mengen A und B sowie einer heterogenen binären Relation auf den Mengen B und A eignet sich ein bipartiter Graph besonders gut. Die Abbildungen der Vergröberung oder Verfeinerung von Graphen lassen sich grundsätzlich durch eine oder mehrere bipartite Graphen darstellen.

Eine Abbildung ist eine totale und eindeutige Relation. Das heißt, jedem Element der Definitionsmenge wird nur genau ein Element der Zielmenge zugeordnet. Eine Abbildung läßt sich so auch vereinfacht als Zuordnungstabelle beschreiben, in der auf der rechten Seite nacheinander alle Elemente der Zielmenge und auf der linken Seite jeweils das zugeordnete Element der Definitionsmenge eingefügt sind.

Da eine Verfeinerung die inverse Relation zur Vergröberung darstellt, also mit den dualen geordneten Paaren zu den geordneten Paaren der Vergröberungsabbildung gefüllt ist, reicht für die Vergröberung und die entsprechende Verfeinerung eine Zuordnungstabelle aus. Für die Verfeinerung wird die Tabelle lediglich von links nach rechts und für eine Vergröberung wird sie von rechts nach links “gelesen”. Somit lassen sich in jedem Fall die Zusammenhänge zwischen zwei übereinanderliegenden Gebilden in der Verfeinerungshierarchie durch eine oder mehrere Zuordnungstabellen der Vergröberungs– und der inversen Verfeinerungsrelationen beschreiben.

Im Sonderfall von bijektiven Abbildungen, wie sie in den Vergröberungs– und Verfeinerungsmöglichkeiten der Abschnitte 5.1.2, 5.1.3, und 5.1.4 auftreten, wird nicht nur jedem Element der Definitionsmenge genau ein Element der Zielmenge zugeordnet, sondern auch jedem Element der Zielmenge genau ein Element der Definitionsmenge. Die Definitionsmenge hat daher genausoviele Elemente wie die Zielmenge, und ein Element der einen Menge ist mit genau einem Element der anderen Menge verbunden, sodaß in der Zuordnungstabelle auf keiner Seite ein Element doppelt auftritt.

Für die Implementierung einer solchen Zuordnungstabelle gibt es verschiedene Möglichkeiten, die alle ihre Vor– und Nachteile haben. Die Zuordnungstabelle als seperate Tabelle abzulegen hat den Vorteil, das die Gebilde des Graphensystems nicht verändert werden müssen, und das diese Gebilde völlig unabhängig voneinander behandelt werden können. So stellt beispielsweise die Auslagerung von Gebilden, die für eine Aufgabe unrelevant sind, auf einem Plattenspeicher kein Problem dar. Ein Nachteil ist die Einschränkung der Laufzeit, zum Beispiel beim Suchen eines Elements, da die Elemente nicht direkt miteinander verbunden sind. Eine leichte Verbesserung kann durch eine geschickte Verzeigerung der Einträge in der Tabelle zu den Elementen der Gebilde im System erreicht werden.

Eine direkte Verzeigerung jedes Elements mit seinem grobem Urbild und seinem feinem Bild hat zwar den Vorteil der schnellstmöglichen Algorithmen im System, sollte aber dennoch vermieden werden, da das hierarchische Graphensystem als Ganzes behandelt werden muß, und etwa eine Auslagerung unrelevanter Systembereiche nicht möglich ist.

Eine Alternative stellt die Ersetzung der Zeiger durch Indentifikatoren (beispielsweise durch ganze Zahlen) dar. So ist zwar keine direkte Verbindung zwischen den Elementen unterschiedlicher Hierarchiestufen möglich, doch ist eine Auslagerung von Systembereichen realisierbar und keine separate Datenstruktur für die Zuordnungstabelle notwendig. Denkbar sind auch gemischte Darstellungsvarianten der Zuordnungstabelle. Welche Vor– und Nachteile diese Varianten haben, ist anhand von praktischen Beispielen zu testen.

Es tritt selten auf, daß ein Graph global vergröbert oder verfeinert wird, daß also alle seine Knoten auf einmal vergröbert oder verfeinert werden. Auch für große Bereiche des Graphen wird eine globale Vergröberung oder Verfeinerung kaum der Regelfall sein. Eine Vergröberung oder Verfeinerung eines Graphen ist im Normalfall lokal, sodaß nur ein Knoten vergröbert oder verfeinert wird. Außerdem läßt sich eine globale Vergröberung oder Verfeinerung durch lokale Vergröberungen oder Verfeinerungen aller Knoten eines Graphen darstellen. Diese Tatsache ist bei der Strukturierung eines hierarchischen Graphensystems nutzbar.

Jede Hierarchiestufe besteht aus einem Gebilde, dessen Elemente die Verfeinerung der Elemente im darüberliegenden Gebilde der Hierarchie darstellen. Durch Auflösung der Gebilde ist es möglich, auf einer Hierarchiestufe nur noch die Elemente abzulegen, die auch tatsächlich durch eine lokale Vergröberung nötig sind. Da für eine komplette Abbildung die restlichen Elemente des groben Gebildes, die eigentlich nicht verfeinert werden, lediglich auf sich selbst oder auf eine Menge, einen Graph beziehungsweise einen Anschlußgraph mit diesem Element abgebildet werden müssen, können sie jederzeit im System reproduziert werden, sodaß eine explizite Darstellung in den verfeinerten Gebilden nicht notwendig ist. Auf diese Weise braucht eine Vielzahl überflüssiger Informationen im Graphensystem nicht dargestellt werden. Ob sich ein solches Weglassen nicht verfeinerter Knoten tatsächlich positiv auswirkt, bleibt zu untersuchen.

6.2. Grundoperationen in hierarchischen Graphensystemen

Zu den Grundoperationen eines hierarchischen Graphensystems zur Unterstützung der Vergröberung und Verfeinerung von Graphen gehören neben dem Vergröbern und Verfeinern von Knoten in jedem Fall die Grundoperationen auf einen Graph. Hierbei sind das Einfügen und das Entfernen von Knoten und Kanten sowie deren Suche in den Graphen die wichtigsten Operationen. Desweiteren gehören zu den Grundlagen eines funktioniernden Systems Anfrageoperationen, wie etwa die Frage nach der Lage eines Knotens in der Hierarchie oder nach dem gröberen Knoten zu einem gegebenen Knoten.

Weitere Operationen, wie Tests oder spezielle Algorithmen auf dem hierarchischen Graphensystem sind denkbar, sollen an dieser Stelle jedoch nicht weiter untersucht werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Prinzipien für die Operationen der Vergröberns und Verfeinerns von Knoten sowie für das Einfügen und Entfernen von Knoten und Kanten in einen Graphen des hierarchischen Systems erläutert. Wie diese Operationen im Detail aussehen, hängt von der Implementierung ab und wird hier ebenfalls nicht weiter beschrieben.

Grundoperationen zur Verfeinerung eines Knotens

Die Verfeinerung eines Knotens entspricht einer Abbildung des Knotens auf mehrere Knoten, auf eine Knotenmenge, auf einen Graph oder auf einen Anschlußgraph. Abbildungen sind Zuordnungen. Das heißt, sowohl der Knoten als Element der Definitionsmenge als auch die Elemente der Zielmenge, auf die der Knoten abgebildet wird, müssen vor dem Vorgang der Verfeinerung bereits existieren.

Dies bedeutet, daß für die Operation des Verfeinerns der Knoten und die Elemente der Zielmenge, auf die der Knoten abgebildet werden soll (Knotenmenge, Graph, Anschlußgraph) bekannt sein müssen. Existieren diese Elemente noch nicht, so sind sie *vor* der Verfeinerung des Knotens zu erzeugen. Stellen die Elemente der Zielmenge keinen Anschlußgraph dar, so sind darüberhinaus die inzidenten (Anschluß−) Kanten zwischen den Elementen der Zielmenge und dem restlichen verfeinerten Gebilde anzugeben.

Bei der Verfeinerungsoperation ist zunächst zu prüfen, ob der Knoten, der verfeinert werden soll, im System existiert. Ist dies nicht der Fall, wird die Operation mit einer Fehlermeldung abgebrochen. Als nächstes ist zu testen, ob von diesen Knoten bereits eine Verfeinerung besteht. Ist die Verfeinerung noch nicht vorhanden, so wird die Operation fortgesetzt. Ist sie jedoch vorhanden, so gibt es zwei Möglichkeiten weiter zu verfahren.

Die einfachere Möglichkeit ist die, einen Fehler anzugeben und die Verfeinerungsoperation nicht auszuführen. Die zweite Möglichkeit ist die, die bereits bestehende Verfeinerung des Knotens aus dem Graphensystem zu entfernen. Dies kann unter Umständen dazu führen, daß auch die Verfeinerungen der Verfeinerung auf den unteren Stufen der Hierarchie aus dem System entfernt werden müssen. Eine Möglichkeit, die bestehende Verfeinerung weiter im Graphensystem zu belassen, ist nicht denkbar, da sonst die Abbildungen (besonders die bijektiven) nicht mehr korrekt sind.

Die Elemente der Zielmenge der Verfeinerung wie Knoten, Knotenmenge, Graph oder Anschlußgraph sind im nächsten Schritt der Verfeinerungsoperation in die Hierarchiestufe unter derjenigen, in der sich der zu verfeinernde Knoten befindet, einzufügen. Existiert diese Stufe noch nicht, da der Knoten sich auf der untersten Verfeinerungsstufe befindet, so ist eine neue Stufe zu erzeugen. Sie entspricht dann einer Verfeinerung der darüberliegenden Stufe, bei der jeder Knoten auf sich selbst oder auf eine Menge, einen Graph beziehungsweise einen Anschlußgraph mit diesem Knoten als einziges Element, abgebildet wurde.

Bevor die Elemente der Zielmenge der Verfeinerung in den verfeinerten Graph eingefügt werden, ist zu testen, ob die angegebenen Anschlußkanten zu einer strukturverträglichen Abbildung führen. Ist dies nicht der Fall, so kann entweder die Verfeinerung mit einer Fehlermeldung abgebrochen werden oder sämtliche Knoten der Verfeinerung strukturverträglich angeschlossen werden. Die Darstellung der durchgeführten Verfeinerungsabbildungen ist in Form von Einträgen in die Zuordnungstabellen zwischen den betroffenen Hierarchien einzufügen.

Entsprechend der Zusatzanforderung für gerichtete Graphen ist darauf zu achten, daß die Pfeile, die die Nachbarknoten des zu verfeinernden Knotens bilden, notfalls ohne innere Struktur verfeinert werden.

Grundoperationen zur Vergröberung eines Knotens

Die Vergröberung eines Knotens entspricht einer Abbildung mehrerer Knoten, einer Knotenmenge, eines Graphen oder eines Anschlußgraphen auf einen Knoten. Die Knoten, die Knotenmenge, der Graph oder der Anschlußgraph bilden Elemente der definitionsmenge und der zu vergröbernde Knoten ein Element der Zielmenge.

Der Vergröberungsoperation sind also der Knoten und die Elemente der Defionitionsmenge (Knotenmenge, Graph, Anschlußgraph) als Parameter zu übergeben. Die Anschlußkanten brauchen nicht explizit angegeben zu werden, da sie aufgrund der Strukturverträglichkeitsbedingung im Graphensystem berrechnet werden können.

Zunächst ist zu prüfen, ob sich die Elemente der Definitionsmenge in der obersten Hierarchiestufe befinden. Ist dies nicht der Fall, so kann die Vergröberungsoperation fortgesetzt werden. Ansonsten muß eine neue oberste Hierarchiestufe erzeugt werden. Die Erzeugung kann durch ein Verfeinern des gesamten Systems erreicht werden. Dabei wird die oberste Hierarchiestufe kopiert. Dann wird jede darunterliegende Stufe durch ein Gebilde ersetzt, das eine Verfeinerung des Gebildes darstellt, in dem jedes Element auf sich selbst oder auf eine Menge, auf einen Graphen beziehungsweise einen Anschlußgraphen mit nur dem jeweiligen Element abgebildet wird.

Als Nächstes wird geprüft, ob die Elemente der Definitionsmenge im System existieren. Ist dies nicht der Fall, wird die Operation mit einer Fehlermeldung abgebrochen. Danach wird der Knoten, auf den vergröbert werden soll, in die nächsthöhere Verfeinerungsstufe eingefügt. Für die Anschlußkanten der Elemente der Definitionsmenge werden im groben Graph neue Kanten erzeugt, auf die die Anschlußkanten strukturverträglich abgebildet werden können. Dann werden die Knoten aus dem gröberen Gebilde entfernt, die zum vergröberten Knoten zusammengefaßt wurden.

Bestehen die Elemente der Definitionsmenge nicht aus einzelnen Knoten, so wird die zu vergröbernde Menge oder der zu vergröbernde (Anschluß−) Graph in das feinere Gebilde eingefügt, die Anschlußkanten von den Mengen, Graphen oder Anschlußgraphen, die die gleichen Knoten besitzen, übernommen und die überflüssig gewordenen Mengen, Graphen oder Anschlußgraphen aus dem Gebilde entfernt.

Die Zuordnungtabellen ist natürlich auch bei den Vergröberungen entsprechend der durchgeführten Abbildungen zwischen den betroffenen Hierarchien zu modifizieren.

Grundoperationen zum Einfügen eines Knotens oder einer Kante

Durch das Einfügen eines Knotens in einen Graph wird die Struktur des Graphen verändert. Diese Strukturveränderung muß auch im hierarchischen Graphensystem berücksichtigt werden.

Beim Einfügen eines Knotens in ein hierarchisches Graphensystem ist anzugeben, auf welcher Hierarchiestufe er eingefügt werden soll. Auf den Stufen unter der angegebenen Hierarchiestufe ist eventuell die Verfeinerung in Form einer Menge, eines Graphen oder eines Anschlußgraphen mit dem Knoten als einziges Element strukturverträglich abzubilden. In der Stufe über dem angegebenen Gebilde ist ein Knoten auszuwählen, zu dessen Verfeinerung der neue Knoten gehört. Die Zuordnungstabellen zur Darstellung der Vergröberungs− und Verfeinerungsabbildungen sind entsprechend der Änderungen beim Einfügen eines Knotens zu modifizieren.

Beim Einfügen einer Kante ist analog zum Einfügen eines Knotens darauf zu achten, daß zur Kante in der höheren (gröberen) Hierarchiestufe eine Kante existiert beziehungsweise eingefügt wird, auf die die neue Kante strukturverträglich abgebildet werden kann. In den tiefern (feineren) Hierarchiestufen müssen die entsprechenden Kanten, Kantenmengen, Graphen oder Anschlußgraphen enthalten sein, die die neue Kanten auf diesen Verfeinerungsstufen darstellen.

Grundoperationen zum Entfernen eines Knotens oder einer Kante

Beim Entfernen eines Knotens aus einer Hierarchiestufe des Graphensystems müssen auch dessen Verfeinerungen in den tieferen Hierarchiestufen aus dem System entfernt werden. Ist der Knoten der einzige in der Verfeinerung eines Knotens der nächsthöheren Verfeinerungsstufe, so muß entweder dieser Knoten der höheren Stufen auch entfernt werden, oder aber der zu entfernende Knoten wird nicht entfernt und es wird eine fehler ausgegeben. Dies begründet sich auf der bedingung, das die Verfeinerung aus mindestens einem Knoten oder einem nichtleeren Gebilde bestehen muß. Ansonsten sind auf den höheren Stufen gegebenenfalls die Kanten zu entfernen, die auf der feineren Stufe den zu entfernden Knoten mit seinen Nachbarknoten verbunden haben. Für das Entfernen von Kanten aus den hierarchischen Graphensystem gilt im Prinzip das gleiche. Die Zuordnungstabellen zur Darstellungen der Vergröberungs− und Verfeinerungsabbildungen sind auch hier entsprechend der Änderungen beim Entfernen eines Knotens oder einer Kante zu modifizieren.

6.3. Routensuche in hierarchischen Graphensystemen

Als Beispiel einer Anwendung für hierarchische Graphensysteme soll das Prinzip einer Routensuche auf einem Wegenetz unter Berücksichtigung der Vergröberung und Verfeinerung von Graphen erläutert werden. Die Entwicklung einer Methode für diese Routensuche ist derzeit nicht möglich, da zur Zeit noch nicht klar ist, wie die Bewertungen der Kanten, die für eine Routensuche grundlegend sind, bei einer Vergröberung beziehungsweise Verfeinerung verändert werden. Dies ist in zukünftigen Forschungsarbeiten zu untersuchen. Im folgenden wird vorausgesetzt, daß die Bewertungen auf jeder Hierarchiestufe korrekt sind.

Routensuchen gehören zu den Grundalgorithmen im Verkehrswesen. Sie bestimmen den kürzesten oder den besten Weg zwischen zwei Orten im Wegenetz beziehungsweise zwischen zwei Knoten im Graph. Der Ablauf des Algorithmen ist unter anderem in [Br94] und [Ro96] beschrieben.

Das Problem bei Routensuchalgorithmen für große Graphen ist, daß häufig fast der gesamte Graph durchsucht werden muß. Wird der Graph vergröbert und zunächst der kürzeste Weg im groben Graph von der Vergröberung mit dem Startknoten zur Vergröberung mit dem Zielknoten gesucht, so könnte bei erfolgreicher Suche der der Bereich der weiteren Routensuche im feinen Graph auf die Verfeinerung der Knoten reduziert werden, durch die der Weg verläuft.

Dies kann über einige Hierarchiestufen geschehen, sodaß für den kürzesten Weg in einem großen feinen Graph zunächst auf der gröbsten Stufe zwischen den entsprechenden Start− und Zielknotenvergröberungen der kürzeste Weg gesucht wird, der nicht benötigte Bereich vernachläßigt werden kann und in der nächstfeineren Stufe wieder der kürzeste Weg gesucht wird, bis der Algorithmus wieder auf der feinsten Stufe angelangt ist. Wird auf jeder Hierarchiestufe ein kürzester Weg gefunden, so ist der Algorithmus korrekt und der kürzeste Weg im feinsten Graph gefunden.

Wird auf einer Verfeinerungsstufe kein kürzester Weg gefunden, so muß auf der gesamten Stufe der Weg nochmal gesucht werden, da ein kürzester Weg existieren kann, der nicht durch den von den gröberen Stufen reduzierten Graphenbereich verläuft. Ist eine Routensuche auf zwei Stufe nicht beim erstenmal erfolgreich, so wird der Algorithmus uneffektiv.

Die Routensuche unter Berücksichtigung der Vergröberung und Verfeinerung der Graphen ist immer erfolgreich, wenn es eine Regel gäbe, die garantiert, daß immer ein Weg in einer Verfeinerung eines Knotens gefunden wird.

Für Wegenetze gibt es eine solche Regel. Da Wegenetze so konzipiert sind, daß jeder Ort des Wegenetzes von jedem anderen Ort im Netz erreichbar sein muß, gibt es zwischen allen Knoten eines Wegenetzes einen Weg. Dies entspricht für die Graphen zur Darstellung der Wegenetze, daß sie zusammenhängend sind.

Wenn für die Anwendung eines Wegenetzes in einem hierarchischen Graphensystem zusätzlich zur Grundregel der Strukturverträglichkeit die Regel, daß die Graphen jeder Hierarchiestufe und jede Verfeinerung eines Knotens zusammenhängend sind, dann ist die Routensuche in jedem Fall erfolgreich. Es gibt dann auf jeder Hierarchiestufe immer mindestens einen Weg zwischen den Vergröberungen der Start− und Zielknoten in dem Bereich, der durch die Routensuche auf den gröberen Stufen reduziert wurde. Diese Aussage basiert auf folgender Überlegung:

Besteht ein Weg vom Knoten $x \in A$ eines Graphen $G_A = (A, R_A)$ zum Knoten $y \in B$ des Graphen $G_B = (B, R_B)$, so muß mindestens ein Weg von $x \in A$ nach $p \in A$, ein Weg von $p \in A$ nach $q \in B$ und ein Weg von $q \in B$ nach $y \in B$ bestehen. Ein Weg von x nach y besteht, wenn G_A und G_B zusammenhängend sind und ein Weg von G_A nach G_B existiert. Existiert ein Weg von G_A nach G_B und und sind G_A und G_B jeweils zusammenhängend, so existiert von jedem Knoten $x \in A$ ein Weg nach $y \in B$.

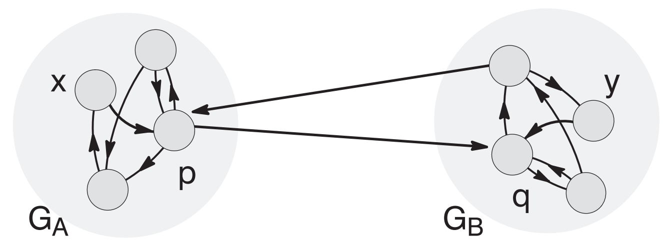


Bild 30: Zusammenhang der Verfeinerungen zweier Knoten

Die Regel, daß für Wegenetze jeder Graph und jede Verfeinerung eines Knotens zusammenhängend sein muß, sollte wie die Regel der Strukturverträglichkeit bei jeder Operation gelten. Das heißt, das Graphensystem wird ”zusammenhängend” konstruiert. Eine Prüfung aller Graphen und Verfeinerungen auf Erfüllung dieser Regel während der Routensuche ist zwar möglich, doch wahrscheinlich zu aufwendig.

Wichtig ist, daß neben der Regel der Strukturverträglichkeit anwendungsabhängig eine oder mehrere weitere Regeln an das hierarchische Graphensystem gestellt werden müssen, um für diese Anwendungen geeignete und korrekte Strukturen zu erhalten. Im Fall der Wegenetze ist es die Regel der Zusammenhänge aller Graphen und Verfeinerungen.

7. Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde aufgezeigt, wie die Vergröberung und Verfeinerung von Graphen zu hierarchischen Graphensystemen führt. Die Grundstruktur des Systems besteht aus unterschiedlich feinen Graphen, die entsprechend ihrer Verfeinerungstiefe sortiert sind, und aus der Darstellung der Abbildungen, die die Vergröberung oder Verfeinerung des Graphen auf einer Hierarchiestufe in einer darüber– oder darunterliegenden Stufe beschreiben. Eine Regel, die grundsätzlich bei jeder Operation auf dem System eingehalten werden muß, ist die Strukturverträglichkeit.

Für jede Anwendung werden zur Strukturverträglichkeit weitere Regeln an das Graphensystem zu bestimmen sein. So ist für Wegenetze die Forderung, daß jede Verfeinerung eines Knotens zusammenhängend sein muß, grundlegend.

Wie sich das System bei Operationen, die diese Regeln erfüllen müssen, verhält, welche Strukturen sich dabei ergeben, wie die Operationen auszusehen haben und wie die zusätzlichen Regeln zur Strukturverträglichkeit in das System gebracht werden können, sind Probleme, die zu untersuchen sind.

Die Vor– und Nachteile, die ein solches hierarchisches Graphensystem bietet, und die beim Beispiel mit der Routensuche angedeutet wurden, sind zur Zeit im vollen Umfang nicht abzusehen. Hierfür sind besonders Erfahrungen mit praktischen Anwendungen im Ingenieurwesen zu sammeln. Die Probleme, die sich für das System bei großen Graphenanwendungen ergeben, sind bei den zukünftigen Untersuchungen besonders wichtig, da das System ja gerade für diese Problemklasse entwickelt werden soll.

Besonders geeignet für die Anwendung des hierarchischen Graphensystems ist derzeit der Bereich des Verkehrswesens. Hier tritt eine Vielzahl von sehr großen unregelmäßigen Netzstrukturen auf, deren Komplexität ohne eine genaue Beschreibung der Topologie, wie sie mit Graphen möglich ist, nicht bewältigt werden kann.

Wenn das hierarchische Graphensystem soweit ausgereift ist, daß die topologische und geometrische Beschreibung eines großen Wegenetzes im Verkehrswesen, mit den Regeln, die dieses an das System stellt, korrekt beschrieben wird, kann damit begonnen werden, die Prozesse (Betrieb, Physik), die auf dem Netz ablaufen, darzustellen. Gerade für die Aufgaben, die mit dem neuen Verkehrsbeeinflussungssystemen zur Steuerung und Leitung des Straßenverkehrs sowie den neuen Betriebskonzepten zur Individualisierung des Schienenverkehrs könnte ein hierarchisches Graphensystem von großer Bedeutung sein. Sehr interessant ist letzlich auch die Frage, ob auf den groben Hierarchiestufen eines solchen Systems Verkehrsabläufe makroskopisch beschrieben werden können, während sie auf den feinen Stufen des Systems mikroskopisch simuliert werden.

8. Literaturverzeichnis

[Br94] Brandstädt, A.:
Graphen und Algorithmen.
B.G. Teubner, Stuttgart, 1994

[Bro79] Bronstein, I.N.; Semendjajew K.A.:
GTaschenbuch der Mathematik.
B.G. Teubner, Leipzig, 1983

[Ju94] Jungnickel, D.:
Graphen, Netzwerke und Algorithmen.
BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994

[Ro96] Rose, M.:
Kritische Analyse von Routensuchverfahren.
Institut für Verkehrswirtschaft, Straßenwesen und Städtebau,
Universität Hannover, 1996

[Sch89] Schmidt, G.; Ströhlein, T.:
Relationen und Graphen.
Springer, Berlin, 1989

[Wa89] Wanke, E.:
Algorithmen und Komplexitätsanalyse für die Verarbeitung hierarchisch definierter Graphen und hierarchisch definierter Graphfamilien.
Dissertation, Universität Gesamthochschule Paderborn, 1989

9. Anlagenverzeichnis

Anlage 1:	**Satellitenbildkarte von Niedersachsen** Niedersächsisches Landesverwaltungsamt 1987	**1:500.000**
Anlage 2:	**Topographische Übersichtskarte von Niedersachsen** Niedersächsisches Landesverwaltungsamt 1993	**1:500.000**
Anlage 3:	**Topographische Karte Großraum Hannover** Niedersächsisches Landesverwaltungsamt 1992	**1:100.000**
Anlage 4:	**Topographische Umgebungskarten von Hannover** Stadtvermessungsamt Hannover 1992	**1:50.000**
Anlage 5:	**Topographische Stadtkarte Hannover** Stadtvermessungsamt Hannover 1996	**1:20.000**
Anlage 6:	**Topographische Stadtkarte Hannover Mitte** Stadtvermessungsamt Hannover 1996	**1:10.000**
Anlage 7:	**Topographische Grundkarte Hannover West** Katasteramt Hannover 1995	**1:5.000**
Anlage 8:	**Topographische Stadtkarte Hannover Nordstadt** Stadtvermessungsamt Hannover 1995	**1:1.000**
Anlage 9:	**Ausschnitt von Anlage 3 (1:100.000) in der Größe von Anlage 8 (1:1000)** Niedersächsisches Landesverwaltungsamt 1992	
Anlage 10:	**Ausschnitt von Anlage 4 (1:50.000) in der Größe von Anlage 8 (1:1000)** Stadtvermessungsamt Hannover 1992	
Anlage 11:	**Ausschnitt von Anlage 5 (1:20.000) in der Größe von Anlage 8 (1:1000)** Stadtvermessungsamt Hannover 1996	
Anlage 12:	**Ausschnitt von Anlage 6 1:10.000) in der Größe von Anlage 8 (1:1000)** Stadtvermessungsamt Hannover 1996	
Anlage 13:	**Ausschnitt von Anlage 7 (1:5.000) in der Größe von Anlage 8 (1:1000)** Katasteramt Hannover 1995	
Anlage 14:	**Topographische Stadtkarte Hannover Nordstadt** Stadtvermessungsamt Hannover 1995	**1:1.000**

Anlage 15:	**Straßenkarte Mitteleuropa** Shell Autoatlas 1996/97	**1:4.500.000**
Anlage 16:	**Straßenkarte Deutschland** Shell Autoatlas 1996/97	**1:750.000**
Anlage 17:	**Straßenkarte Norddeutschland** Shell Autoatlas 1996/97	**1:400.000**
Anlage 18:	**Straßenkarte Hannover und Umgebung** Shell Autoatlas 1996/97	**1:200.000**
Anlage 19:	**Straßenkarte der Zufahrten nach Hannover** Shell Autoatlas 1996/97	**1:100.000**
Anlage 20:	**Straßenkarte Hannover** Shell Autoatlas 1996/97	**1:17.500**
Anlage 21:	**Straßenkarte Hannover Innenstadt** Shell Autoatlas 1996/97	**1:11.000**
Anlage 22:	**Eisenbahnkarte für den Personenverkehr** Deutsche Bahn 1996	**1:1.200.000**
Anlage 23:	**Topographische Grundkarte Hannover** Katasteramt Hannover 1995	**1:5.000**
Anlage 24:	**Topographische Stadtkarte Hannover 5** Stadtvermessungsamt Hannover 1995	**1:1.000**
Anlage 25:	**Stadtbahnnetz Hannover** üstra Hannoversche Verkehrsbetriebe AG 1996	

Anlagen

Anlage 1:	**Satellitenbildkarte von Niedersachsen** Niedersächsisches Landesverwaltungsamt 1987	**1:500.000**
Anlage 2:	**Topographische Übersichtskarte von Niedersachsen** Niedersächsisches Landesverwaltungsamt 1993	**1:500.000**
Anlage 3:	**Topographische Karte Großraum Hannover** Niedersächsisches Landesverwaltungsamt 1992	**1:100.000**
Anlage 4:	**Topographische Umgebungskarten von Hannover** Stadtvermessungsamt Hannover 1992	**1:50.000**
Anlage 5:	**Topographische Stadtkarte Hannover** Stadtvermessungsamt Hannover 1996	**1:20.000**
Anlage 6:	**Topographische Stadtkarte Hannover Mitte** Stadtvermessungsamt Hannover 1996	**1:10.000**
Anlage 7:	**Topographische Grundkarte Hannover West** Katasteramt Hannover 1995	**1:5.000**
Anlage 8:	**Topographische Stadtkarte Hannover Nordstadt** Stadtvermessungsamt Hannover 1995	**1:1.000**
Anlage 9:	**Ausschnitt von Anlage 3 (1:100.000) in der Größe von Anlage 8 (1:1000)** Niedersächsisches Landesverwaltungsamt 1992	
Anlage 10:	**Ausschnitt von Anlage 4 (1:50.000) in der Größe von Anlage 8 (1:1000)** Stadtvermessungsamt Hannover 1992	
Anlage 11:	**Ausschnitt von Anlage 5 (1:20.000) in der Größe von Anlage 8 (1:1000)** Stadtvermessungsamt Hannover 1996	

Anlage 12:	**Ausschnitt von Anlage 6 1:10.000) in der Größe von Anlage 8 (1:1000)** Stadtvermessungsamt Hannover 1996	
Anlage 13:	**Ausschnitt von Anlage 7 (1:5.000) in der Größe von Anlage 8 (1:1000)** Katasteramt Hannover 1995	
Anlage 14:	**Topographische Stadtkarte Hannover Nordstadt** Stadtvermessungsamt Hannover 1995	**1:1.000**
Anlage 15:	**Straßenkarte Mitteleuropa** Shell Autoatlas 1996/97	**1:4.500.000**
Anlage 16:	**Straßenkarte Deutschland** Shell Autoatlas 1996/97	**1:750.000**
Anlage 17:	**Straßenkarte Norddeutschland** Shell Autoatlas 1996/97	**1:400.000**
Anlage 18:	**Straßenkarte Hannover und Umgebung** Shell Autoatlas 1996/97	**1:200.000**
Anlage 19:	**Straßenkarte der Zufahrten nach Hannover** Shell Autoatlas 1996/97	**1:100.000**
Anlage 20:	**Straßenkarte Hannover** Shell Autoatlas 1996/97	**1:17.500**
Anlage 21:	**Straßenkarte Hannover Innenstadt** Shell Autoatlas 1996/97	**1:11.000**
Anlage 22:	**Eisenbahnkarte für den Personenverkehr** Deutsche Bahn 1996	**1:1.200.000**
Anlage 23:	**Topographische Grundkarte Hannover** Katasteramt Hannover 1995	**1:5.000**
Anlage 24:	**Topographische Stadtkarte Hannover 5** Stadtvermessungsamt Hannover 1995	**1:1.000**
Anlage 25:	**Stadtbahnnetz Hannover** üstra Hannoversche Verkehrsbetriebe AG 1996	